



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

STRUMENTO DI INTERVENTO

Supporto della memoria nel ricordare i teoremi

Università di Genova¹

1. Introduzione

Al fine di sviluppare attività didattiche finalizzate al supporto della memoria in geometria, si rimanda ad alcuni quadri teorici che verranno descritti nella sessione 2.

Nella sessione 3 viene descritto il disegno delle attività educative. In particolare, se le attività sono rivolte agli studenti o alla classe, la finalità didattica delle attività, l'Area Cognitiva e ambito matematico di interesse e gli Oggetti Matematici nelle aree di difficoltà individuate attraverso il questionario B2.

2. Quadro teorico di riferimento

I riferimenti teorici che ci hanno aiutato a progettare le seguenti attività sono:

1) Principi di progettazione universale per l'apprendimento (UDL) (Tabella 3), un framework concepito specificamente per progettare attività educative *inclusive* (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabella 3: linee guida UDL

	Fornire molteplici mezzi di COINVOLGIMENTO	Fornire molteplici mezzi di RAPPRESENTAZIONE	Fornire molteplici mezzi di AZIONE ed ESPRESSIONE
	Reti Efficaci – I “PERCHÉ” dell'apprendimento	Reti di Riconoscimento – Il “COSA” dell'apprendimento	Reti Strategiche – Il “COME” dell'apprendimento
Accedere	Fornire opzioni per Catturare l'interesse : <ul style="list-style-type: none"> Ottimizzare la scelta individuale e l'autonomia Ottimizzare rilevanza, valore e autenticità Minimizzare minacce e distrazioni 	Fornire opzioni per la Percezione : <ul style="list-style-type: none"> Offrire modi di personalizzare la visualizzazione delle informazioni Offrire alternative di sollecitazioni uditive Offrire alternative per le informazioni visive 	Fornire opzioni per Azioni Fisiche : <ul style="list-style-type: none"> Variare i metodi di risposta e di movimento Ottimizzare l'accesso a strumenti e tecnologie assistive
Costruire	Fornire opzioni per Sostenere Sforzo & Persistenza <ul style="list-style-type: none"> Rafforzare l'importanza degli scopi e degli obiettivi Variare richieste e risorse per ottimizzare la sfida Promuovere e collaborazione e condivisione Accrescere i <i>feedback</i> orientati alla padronanza dell'apprendimento 	Fornire opzioni per Linguaggio & Simboli <ul style="list-style-type: none"> Precisare il lessico e i simboli Precisare la sintassi e la struttura Supportare la decodifica di testo, notazioni e simboli matematici Promuovere e la comprensione in tutti i linguaggi Illustrare attraverso molteplici mezzi 	Fornire opzioni per Espressione e Comunicazione : <ul style="list-style-type: none"> Usare molteplici mezzi di comunicazione Usare molteplici mezzi di costruzione e composizione Costruire fluidità nella comunicazione mediante livelli di supporto graduati per la pratica e la prestazione
Interiorizzare	Fornire opzioni per l' auto-regolamentazione : <ul style="list-style-type: none"> Promuovere prospettive e convinzioni che ottimizzano la motivazione Facilitare capacità personali e strategie Sviluppare autovalutazione e riflessione 	Fornire opzioni per la Comprensione : <ul style="list-style-type: none"> Attivare o fornire la conoscenza del contesto Evidenziare percorsi, caratteristiche fondamentali, le grandi idee e le relazioni Guidare la visualizzazione e i processi delle conoscenze Massimizzare trasferimento e generalizzazione delle 	Fornire opzioni per la Funzioni Esecutive Guidare verso la definizione di obiettivi appropriati: <ul style="list-style-type: none"> Supportare lo sviluppo di pianificazioni e strategie Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse Potenziare la capacità di

¹ Emanuela De Negri, Elisabetta Robotti, Francesca Morselli, Paola Viterbori, Anna Siri, Laura Capelli



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

		conoscenze	monitorare i progressi
	Studenti esperti che sono...		
	Determinati & Motivati	Intraprendenti e Competenti	Strategici e Orientati agli obiettivi

Il Center for Applied Special Technology (CAST) ha sviluppato un quadro completo attorno al concetto di Universal Design for Learning (UDL), con l'obiettivo di concentrare la ricerca, lo sviluppo e la pratica educativa sulla comprensione della diversità e sulla facilitazione dell'apprendimento (Edyburn, 2005). UDL include una serie di principi, articolati in Linee guida e punti di controllo². La ricerca alla base della struttura di UDL è che "gli studenti sono molto variabili nella loro risposta all'istruzione. [...]"

Pertanto, UDL si concentra su queste differenze individuali come elemento importante per la comprensione e la progettazione di istruzioni efficaci per l'apprendimento.

A tal fine, UDL avanza tre principi fondamentali: 1) fornire più mezzi di rappresentazione, 2) fornire più mezzi di azione ed espressione, 3) fornire più mezzi di coinvolgimento. In particolare, le linee guida all'interno del primo principio hanno a che fare con i mezzi di percezione coinvolti nel ricevere determinate informazioni e di "comprensione" delle informazioni ricevute. Invece, le linee guida all'interno del secondo principio tengono conto dell'elaborazione di informazioni / idee e della loro espressione. Infine, le linee guida all'interno del terzo principio trattano il dominio dell'"affetto" e della "motivazione", anch'essi essenziali in ogni attività educativa.

Per le nostre analisi ci concentreremo in particolare su linee guida specifiche all'interno dei tre Principi³.

Per caratterizzare le difficoltà degli studenti in geometria, ci riferiamo ai seguenti elementi del frame di Karagiannakis e colleghi (Tabella 1), che trattava la Memoria nel recupero di fatti geometrici e l'elaborazione geometrica: recupero di fatti geometrici, ricordo di teoremi, ricordo di ipotesi e tesi su cui si stanno concentrando.

Tabella 1: Struttura di Karagiannakis e colleghi: domini del modello a quattro punte e serie di abilità matematiche associate a ciascun dominio.

Dominio	Competenze matematiche associate al dominio
numerico di base	senso del numero, stima -continua e discreta-, posizionamento sulla linea dei numeri, gestione degli aspetti lessicali, sintattici, semantici del numero; comprensione del significato dei simboli delle operazioni
memoria	immagazzinamento e recupero di termini nuovi e definizioni, recupero fatti numerici, conoscenza del lessico, decodifica di proprietà o procedure in forma verbale, svolgimento accurato di calcoli a mente, richiamo di uso di formule e procedure
ragionamento logico-matematico	comprensione idee, concetti, principi logici, relazioni; comprensione passi di una sequenza di procedure/algoritmi complessi; gestione di processi di problem solving
visuo-spaziale	esecuzione di calcoli scritti, gestione di aspetti visuo-spaziali dei numeri, interpretazione e uso di rappresentazioni geometriche, visualizzazione, uso della linea dei numeri, interpretazione e costruzione grafici, controllo di informazioni rilevanti in ambito visuo-spaziale



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Poiché questo strumento di intervento riguarda l'attività geometrica, consideriamo la teoria di Duval sulle diverse apprensioni cognitive delle figure, come il modo per vedere, costruire e descrivere una figura geometrica e le sue proprietà.

Il modello di Duval è di particolare interesse in quanto riguarda la comprensione dello sviluppo dei processi cognitivi come rivelato dalla risoluzione di problemi di geometria (Duval, 1998). Duval (1995) suggerisce una teoria analitica per analizzare i processi di pensiero coinvolti in un'attività geometrica.

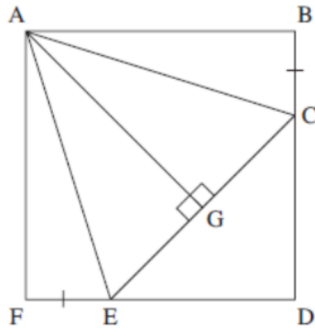
Infatti, nel modello cognitivo di ragionamento geometrico di Duval, la figura gioca un ruolo chiave:

- Una figura ci fornisce una rappresentazione figurativa di una situazione geometrica che è più breve e più facile da capire rispetto a una rappresentazione con linguaggio linguistico.

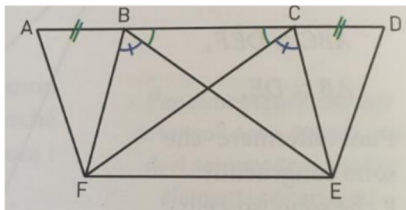
- Esistono diverse apprensioni cognitive delle figure attraverso le quali vedere, costruire e descrivere una figura geometrica e le sue proprietà:

1. Apprensione percettiva
2. apprensione sequenziale
3. Apprensione discorsiva
4. apprensione operativa

1. Apprensione percettiva: riguarda il riconoscimento fisico (forma, rappresentazione, dimensione, luminosità, ecc.) Di una figura percepita. Dovremmo anche discriminare e riconoscere le sotto-figure all'interno delle figure percepite poiché una discriminazione o un riconoscimento rilevante di queste unità di sotto-figure può aiutare e fornire spunti per la risoluzione dei problemi in situazioni geometriche.



O la figura seguente:



Ad esempio, le sotto-figure FBE e FCE che sono anche sovrapposte.

2. Apprensione sequenziale: si tratta della costruzione di una figura o della descrizione della sua costruzione. Tale costruzione dipende da vincoli tecnici e anche da proprietà matematiche poiché la costruzione di una figura può unire unità figurative diverse. Si ritiene che la costruzione possa aiutare il riconoscimento delle relazioni tra proprietà matematiche e vincoli tecnici.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

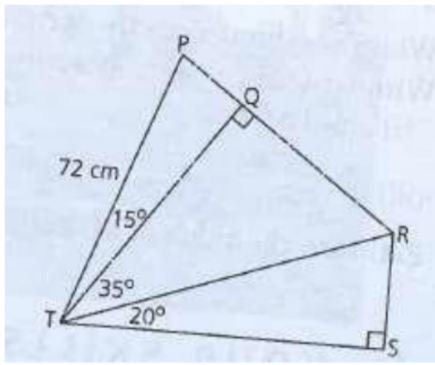
3. Apprensione discorsiva: si tratta di (a) la capacità di connettere le configurazioni con i principi geometrici, (b) la capacità di fornire una buona descrizione, spiegazione, argomentazione, deduzione, uso di simboli, ragionamento a seconda delle affermazioni fatte sul percettivo apprensione, e (c) la capacità di descrivere le figure attraverso un linguaggio geometrico / testi narrativi

4. Apprensione operativa: si tratta di apportare modifiche a una data figura in vari modi per indagare su altre configurazioni:

Il modo mereologico: dividere l'intera figura data in parti di varie forme e combinare queste parti in un'altra figura o sotto-figure;

Il modo ottico: variando la dimensione delle figure; puoi rendere una forma più grande o più stretta, o inclinata, le forme possono apparire in modo diverso;

Il modo del luogo: variando la posizione o il suo orientamento.

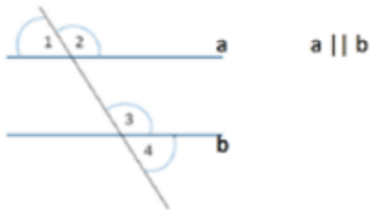


3. Progettazione

3.1 Difficoltà individuate attraverso il questionario B2

Rileviamo difficoltà nel seguente elemento di B2:

2. La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a... ..



3. Quali frasi sono vere?

- A. Gli angoli 1 e 4 sono uguali
- B. Gli angoli 2 e 3 hanno la somma di 180°
- C. Gli angoli 1 e 2 hanno la somma di 180°
- D. L'angolo 3 è maggiore dell'angolo

Le difficoltà sono legate a:

- Recupera dalla memoria dei teoremi
- visualizzare e interpretare le informazioni sul disegno (visualizzare gli angoli e interpretare il loro codice numerico)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274


3.2 Area cognitiva e dominio matematico di interesse

L'area di difficoltà individuata attraverso il questionario B2 è relativa al dominio della Geometria.

La memoria è l'area cognitiva coinvolta.

Nella Tabella 1 l'ubicazione delle difficoltà rispetto al dominio cognitivo e all'area matematica.

Tabella 1: Le difficoltà rilevate sono legate al dominio cognitivo della Memoria e al dominio della Geometria

	Aritmetica	Geometria	Algebra
Memoria		<p>2. The sum of the interior angles of a triangle is equal to</p> <p>3.</p>  <p>Which sentences are true?</p> <p>A. Angles 1 and 4 are equal</p> <p>B. Angles 2 and 3 have the sum 180°</p> <p>C. Angles 1 and 2 have the sum 180°</p> <p>D. Angle 3 is greater than angle 2</p>	
Ragionamento			
Visuo-spaziale			

3.3 Obiettivi educativi

Lo strumento di intervento è finalizzato alla costruzione di strategie per recuperare fatti geometrici e conservarli in memoria per utilizzarli per il ragionamento

3.4 Beneficiari dell'intervento didattico (studente singolo / intera classe)

Lo strumento Intervento si articola in un'attività che può essere svolta con lo studente o con tutta la classe.

3.5 Attività educative: lo strumento di intervento

Il punto di partenza riguardante la progettazione delle attività educative consiste nella seguente affermazione: il modo in cui viene presentato un testo di un'attività (ad esempio, un testo che richiede di dimostrare un teorema geometrico), condiziona la memoria di lavoro e la capacità di recupero dalla memoria delle informazioni (principi UDL).

In un compito di dimostrazione geometrica, la memoria è coinvolta al fine di:

- recuperare teoremi e informazioni
- tenere presenti le ipotesi (presentate nel testo del compito)
- strutturare un piano da dimostrare

L'attività educativa di questo strumento di intervento è concepita per supportare la metacognizione. Promuove lo sviluppo di strategie che permettano agli studenti di



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

supportare la memoria nella sua diversa funzione sopra menzionata. In particolare, questa attività si concentra sul recupero del teorema (al fine di dedurre le informazioni da utilizzare).

Memorizzare e recuperare teoremi e informazioni

Per memorizzare e recuperare teoremi e informazioni, sembra utile costruire il loro significato mediante rappresentazioni dinamiche, ad esempio tramite le funzionalità di GeoGebra. Infatti, una costruzione di GeoGebra supporta la capacità di riconoscere somiglianze nelle configurazioni proposte (figura geometrica) con la figura associata al teorema.

COMPITO 1

Con l'obiettivo di visualizzare il teorema, mostrando le relazioni tra gli angoli formati da una coppia di rette parallele e una trasversale, questo compito sfrutta le rappresentazioni di GeoGebra.

Nella Figura 2 è possibile trovare uno screenshot catturato dal sito di GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>) dove la funzione di trascinamento e la dinamicità del drawing di GeoGebra vengono sfruttate per visualizzare e agire sulla figura geometrica.

Lo scopo dell'attività è utilizzare la funzione di trascinamento per visualizzare diverse configurazioni associate al teorema. Questo permette di plasmare l'idea di generalizzazione della figura geometrica associata al teorema e permette di creare una sorta di data base di possibili immagini da richiamare per identificare nel disegno fornito, la configurazione del teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale (utile ai fini della dimostrazione).

Passaggio 1

Questa applet mostra le relazioni tra la coppia di angoli formata da una coppia di rette parallele e una trasversale. La percezione di questa regolarità è supportata sia dal trascinamento delle linee che dal cambio di angoli. Nel primo caso, le linee cambiano la loro inclinazione ma mantengono il parallelismo tra di loro. Nel secondo caso, gli angoli cambiano la loro dimensione angolare ma mantengono la congruenza tra di loro.

≡ GeoGebra

Parallel Lines & Transversals
↻

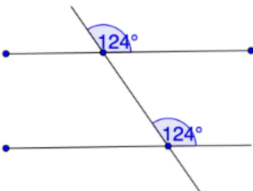
Properties of Parallel Lines

Angles Formed by Parallel Lines an...

Move the points on the parallel lines and/or the transversal & select different angle relationships using the checkboxes.

As you shift the lines, notice the angle measures.

$124^\circ = 124^\circ$



Alternate Interior Same Side Interior Corresponding

Alternate Exterior Same Side Exterior

1 2 1 2 1 2
 3 4

1 2 1 2

⌂



Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Figura 2: verifica (dinamica) delle relazioni tra una coppia di angoli formata da una coppia di rette parallele e una trasversale

Nella Figura 3 è possibile vedere uno screenshot catturato dal sito di GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3Bu>) dove vengono sfruttate la funzione di trascinamento e la dinamicità della figura geometrica.

Passaggio 2

Le linee AB e FC sono parallele. La linea BC è una trasversale delle due linee parallele AB e FC .

Usa i punti A , B e C per modificare i valori degli angoli. Quando una trasversale interseca due rette parallele, quali relazioni angolari si formano? Fai quante più osservazioni puoi.

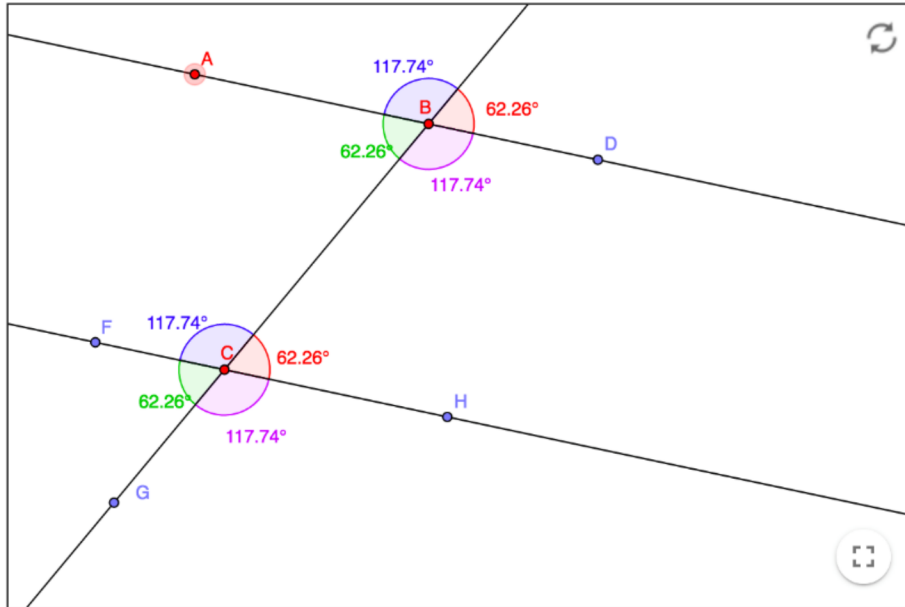


Figura 3: verifica (dinamica) delle relazioni tra angoli formati da una coppia di rette parallele e una trasversale

Nota che i colori consentono agli studenti di concentrare la loro attenzione su un paio di angoli aggirando il codice numerico.

Discussione attraverso le linee guida UDL sulle attività sopra menzionate

In rosso i nostri commenti per illustrare la connessione tra i principi di UDL e le nostre attività.

Tabella 3: Analisi delle attività attraverso la Tabella dei principi UDL.

Impegno	Rappresentazione	Azione ed espressione
---------	------------------	-----------------------



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

<p>Interesse di reclutamento</p> <p>Ottimizza la scelta individuale e l'autonomia</p> <p>Ottimizza la pertinenza, il valore e l'autenticità</p> <p>Riduci al minimo le minacce e le distrazioni</p>	<p>Percezione</p> <p>Offrire modi per personalizzare la visualizzazione delle informazioni</p> <p>Offrire alternative per le informazioni uditive</p> <p>Offrire alternative per le informazioni visive</p> <p>Diversi registri attraverso i quali vengono visualizzate le informazioni (visive non verbali, verbali e simboliche)</p>	<p>Azioni fisiche</p> <p>Varia i metodi di risposta e navigazione</p> <p>Ottimizza l'accesso a strumenti e tecnologie assistive</p> <p><i>Geogebra consente agli studenti di agire fisicamente sugli oggetti figurativi e fornisce loro feedback appropriati sulla loro azione</i></p>
<p>Sforzo di sostegno Persistenza</p> <p>Aumenta l'importanza degli obiettivi e degli obiettivi</p> <p>Varia le richieste e le risorse per ottimizzare la sfida</p> <p>Favorire la collaborazione e la comunità</p> <p>Aumenta il feedback orientato alla maestria</p> <p>Varia le richieste e le risorse per ottimizzare la sfida</p> <p>Favorire la collaborazione e la comunità</p> <p><i>I feedback del software supportano l'impegno e la motivazione rispetto all'elaborazione della soluzione del compito</i></p>	<p>Linguaggio e simboli</p> <p>Chiarire il vocabolario e i simboli</p> <p>Chiarire la sintassi e la struttura</p> <p>Offrire un linguaggio e simboli alternativi per decodificare le informazioni e lavorare sulle informazioni</p> <p><i>Ciò è promosso dall'uso di diversi registri di rappresentazione: figurale non verbale sul disegno, colori</i></p> <p>Supportare la decodifica di testo, notazione matematica e simboli</p> <p>Promuovere la comprensione in tutte le lingue</p> <p>Illustrare attraverso più media</p> <p><i>Ciò è promosso dall'uso di software di geometria dinamica come GeoGebra.</i></p> <p>Supportare la decodifica di testo, notazioni matematiche e simboli</p> <p><i>Ciò è promosso dalla visualizzazione di ipotesi su disegno realizzato da</i></p>	<p>Expression Communication</p> <p>Use multiple media for communication</p> <p>Use multiple tools for construction and composition</p> <p>Build fluencies with graduated levels of support for practice and performance</p> <p>To use different registers in order to communicate</p>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

	GeoGebra	
Autoregolamentazione	Comprensione	Funzioni esecutive
Promuovi aspettative e convinzioni che ottimizzano la motivazione	Attiva o fornisci conoscenze di base	Guida la definizione degli obiettivi appropriati
Facilitare le capacità e le strategie di coping personali	Evidenzia modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni (punto di controllo 3.2)	La funzione di trascinamento dell'uso per visualizzare elementi invarianti sulla figura consente allo studente di costruire una sorta di database di immagini. Supportano la memoria per identificare, nel disegno fornito, la configurazione del teorema da utilizzare. Supportare la pianificazione e lo sviluppo della strategia
Sviluppare l'autovalutazione e la riflessione	Guide information processing and visualization	Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse
	Massimizza il trasferimento e la generalizzazione	Migliora la capacità di monitorare i progressi
	<i>Per supportare la generalizzazione, le attività suggeriscono di visualizzare i disegni su GeoGebra. Infatti, la funzione di trascinamento di GeoGebra consente agli studenti di identificare invarianti della figura e recuperare il teorema adatto per sviluppare la dimostrazione richiesta.</i>	
	Percezione, linguaggio e simboli, comprensione (la costruzione di conoscenza utilizzabile, conoscenza accessibile per futuri processi decisionali, dipende non solo dalla percezione delle informazioni, ma da "capacità di elaborazione delle informazioni" attive)	

4. Bibliografia e sitografia

- [1] Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115–141.
- [2] Duval, R.: 1995, 'Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing', in R. Sutherland and J. Mason (eds.), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- [3] Duval, R.: 1998, 'Geometry from a cognitive point a view', in C. Mammana and V. Villani (eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.
- [4] UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>
- [5] GeoGebra materials: <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>
- [6] <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3BuA>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.