



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

STRUMENTO DI INTERVENTO

Sostenere la memoria nel processo di dimostrazione geometrica

Università di Genova¹

1. Introduzione

Al fine di sviluppare attività didattiche finalizzate al supporto della memoria in geometria, si rimanda ad alcuni quadri teorici che verranno descritti nella sessione 2.

Nella sessione 3 viene descritto il disegno delle attività educative. In particolare, se le attività sono rivolte agli studenti o alla classe, la finalità didattica delle attività, l'Area Cognitiva e il dominio matematico di interesse e gli Oggetti Matematici nelle aree di difficoltà individuate tramite il questionario B2.

2. Quadro teorico di riferimento

I riferimenti teorici che ci hanno aiutato a progettare le seguenti attività sono:

1) Principi di progettazione universale per l'apprendimento (UDL) (Tabella 3), un framework concepito specificamente per progettare attività educative *inclusive* (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabella 3: linee guida UDL

	Fornire molteplici mezzi di COINVOLGIMENTO	Fornire molteplici mezzi di RAPPRESENTAZIONE	Fornire molteplici mezzi di AZIONE ed ESPRESSIONE
	Reti Efficaci – I “PERCHÉ” dell'apprendimento	Reti di Riconoscimento – Il “COSA” dell'apprendimento	Reti Strategiche – Il “COME” dell'apprendimento
Accedere	Fornire opzioni per Catturare l'interesse : <ul style="list-style-type: none"> Ottimizzare la scelta individuale e l'autonomia Ottimizzare rilevanza, valore e autenticità Minimizzare minacce e distrazioni 	Fornire opzioni per la Percezione : <ul style="list-style-type: none"> Offrire modi di personalizzare la visualizzazione delle informazioni Offrire alternative di sollecitazioni uditive Offrire alternative per le informazioni visive 	Fornire opzioni per Azioni Fisiche : <ul style="list-style-type: none"> Variare i metodi di risposta e di movimento Ottimizzare l'accesso a strumenti e tecnologie assistive
Costruire	Fornire opzioni per Sostenere Sforzo & Persistenza <ul style="list-style-type: none"> Rafforzare l'importanza degli scopi e degli obiettivi Variare richieste e risorse per ottimizzare la sfida Promuovere collaborazione e condivisione Accrescere i <i>feedback</i> orientati alla padronanza dell'apprendimento 	Fornire opzioni per Linguaggio & Simboli <ul style="list-style-type: none"> Precisare il lessico e i simboli Precisare la sintassi e la struttura Supportare la decodifica di testo, notazioni e simboli matematici Promuovere la comprensione in tutti i linguaggi Illustrare attraverso molteplici mezzi 	Fornire opzioni per Espressione e Comunicazione : <ul style="list-style-type: none"> Usare molteplici mezzi di comunicazione Usare molteplici mezzi di costruzione e composizione Costruire fluidità nella comunicazione mediante livelli di supporto graduati per la pratica e la prestazione

¹ Emanuela De Negri, Elisabetta Robotti, Francesca Morselli, Paola Viterbori, Anna Siri, Laura Capelli





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Interiorizzare	<p>Fornire opzioni per l'auto-regolamentazione:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promuovere prospettive e convinzioni che ottimizzano la motivazione • Facilitare capacità personali e strategie • Sviluppare autovalutazione e riflessione 	<p>Fornire opzioni per la Comprensione:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Attivare o fornire la conoscenza del contesto • Evidenziare percorsi, caratteristiche fondamentali, le grandi idee e le relazioni • Guidare la visualizzazione e i processi delle conoscenze • Massimizzare trasferimento e generalizzazione delle conoscenze 	<p>Fornire opzioni per la Funzioni Esecutive</p> <p>Guidare verso la definizione di obiettivi appropriati:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Supportare lo sviluppo di pianificazioni e strategie • Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse • Potenziare la capacità di monitorare i progressi
	Studenti esperti che sono...		
	Determinati & Motivati	Intraprendenti e Competenti	Strategici e Orientati agli obiettivi

Il Center for Applied Special Technology (CAST) ha sviluppato un quadro completo attorno al concetto di Universal Design for Learning (UDL), con l'obiettivo di concentrare la ricerca, lo sviluppo e la pratica educativa sulla comprensione della diversità e sulla facilitazione dell'apprendimento (Edybum, 2005). UDL include una serie di principi, articolati in Linee guida e punti di controllo². La ricerca alla base della struttura di UDL è che "gli studenti sono molto variabili nella loro risposta all'istruzione. [...]"

Pertanto, UDL si concentra su queste differenze individuali come elemento importante per la comprensione e la progettazione di istruzioni efficaci per l'apprendimento.

A tal fine, UDL avanza tre principi fondamentali: 1) fornire più mezzi di rappresentazione, 2) fornire più mezzi di azione ed espressione, 3) fornire più mezzi di coinvolgimento. In particolare, le linee guida all'interno del primo principio hanno a che fare con i mezzi di percezione coinvolti nel ricevere determinate informazioni e di "comprensione" delle informazioni ricevute. Invece, le linee guida all'interno del secondo principio tengono conto dell'elaborazione di informazioni / idee e della loro espressione. Infine, le linee guida all'interno del terzo principio trattano il dominio dell'"affetto" e della "motivazione", anch'essi essenziali in ogni attività educativa.

Per le nostre analisi ci concentreremo in particolare su linee guida specifiche all'interno dei tre Principi³.

Per caratterizzare le difficoltà degli studenti in geometria, ci riferiamo ai seguenti elementi del frame di Karagiannakis e colleghi (Tabella 1), che trattava la Memoria nel recupero di fatti geometrici e l'elaborazione geometrica: recupero di fatti geometrici, ricordo di teoremi, ricordo di ipotesi e tesi su cui si stanno concentrando.

Tabella 1: Struttura di Karagiannakis e colleghi: domini del modello a quattro punte e serie di abilità matematiche associate a ciascun dominio.

Dominio	Competenze matematiche associate al dominio
numerico di base	senso del numero, stima -continua e discreta-, posizionamento sulla linea dei numeri, gestione degli aspetti lessicali, sintattici, semantici del numero; comprensione del significato dei simboli delle operazioni
memoria	immagazzinamento e recupero di termini nuovi e definizioni, recupero fatti numerici, conoscenza del lessico, decodifica di proprietà o procedure in forma verbale, svolgimento accurato di calcoli a mente, richiamo di uso di formule e procedure
ragionamento logico-matematico	comprensione idee, concetti, principi logici, relazioni; comprensione passi di una sequenza di procedure/algoritmi complessi; gestione di processi di problem solving



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Poiché questo strumento di intervento riguarda l'attività geometrica, consideriamo la teoria di Duval sulle diverse apprensioni cognitive delle figure, come il modo per vedere, costruire e descrivere una figura geometrica e le sue proprietà.

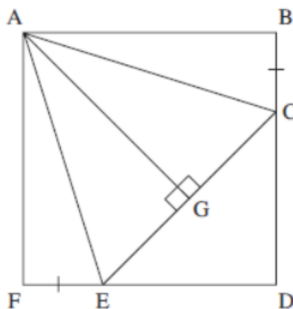
Il modello di Duval è di particolare interesse in quanto riguarda la comprensione dello sviluppo dei processi cognitivi come rivelato dalla risoluzione di problemi di geometria (Duval, 1998). Duval (1995) suggerisce una teoria analitica per analizzare i processi di pensiero coinvolti in un'attività geometrica.

Infatti, nel modello cognitivo di ragionamento geometrico di Duval, la figura gioca un ruolo chiave:

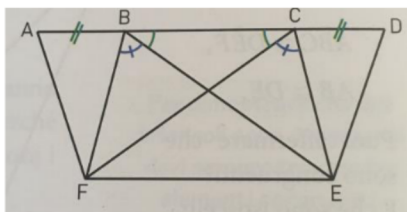
- Una figura ci fornisce una rappresentazione figurativa di una situazione geometrica che è più breve e più facile da capire rispetto a una rappresentazione con linguaggio linguistico.
- Esistono diverse apprensioni cognitive delle figure attraverso le quali vedere, costruire e descrivere una figura geometrica e le sue proprietà:

1. Apprensione percettiva
2. apprensione sequenziale
3. Apprensione discorsiva
4. apprensione operativa

1. Apprensione percettiva: riguarda il riconoscimento fisico (forma, rappresentazione, dimensione, luminosità, ecc.) Di una figura percepita. Dovremmo anche discriminare e riconoscere le sotto-figure all'interno delle figure percepite poiché una discriminazione o un riconoscimento rilevante di queste unità di sotto-figure può aiutare e fornire spunti per la risoluzione dei problemi in situazioni geometriche.



O la figura seguente:



Ad esempio, le sotto-figure FBE e FCE che sono anche sovrapposte.



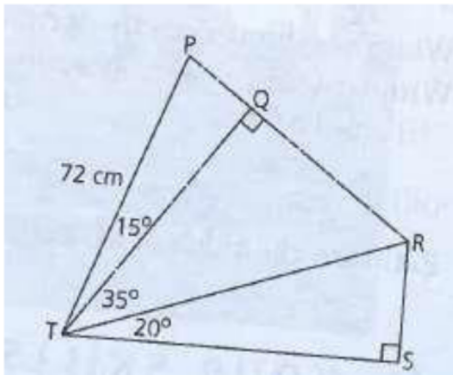
Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

2. Apprensione sequenziale: si tratta della costruzione di una figura o della descrizione della sua costruzione. Tale costruzione dipende da vincoli tecnici e anche da proprietà matematiche poiché la costruzione di una figura può unire unità figurative diverse. Si ritiene che la costruzione possa aiutare il riconoscimento delle relazioni tra proprietà matematiche e vincoli tecnici.

3. Apprensione discorsiva: si tratta di (a) la capacità di collegare le configurazioni con i principi geometrici, (b) la capacità di fornire una buona descrizione, spiegazione, argomentazione, deduzione, uso di simboli, ragionamento che dipende dalle affermazioni fatte sul percettivo apprensione, e (c) la capacità di descrivere le figure attraverso un linguaggio geometrico / testi narrativi

4. Apprensione operativa: si tratta di apportare modifiche a una data figura in vari modi per indagare su altre configurazioni:

- Il modo mereologico: dividere l'intera figura data in parti di varie forme e combinare queste parti in un'altra figura o sotto-figure;
- Il modo ottico: variando la dimensione delle figure; puoi rendere una forma più grande o più stretta o inclinata, le forme possono apparire in modo diverso;
- Il modo del luogo: variando la posizione o il suo orientamento.



3. Progettazione

3.1 Difficoltà individuate attraverso il questionario B2

Rileviamo difficoltà nei seguenti elementi di B2 relativi al dominio della geometria:

Che
Che

Le



$$BC=CD, \quad BA=AD$$

tipo di triangolo è CDA?
tipo di triangolo è BDA?

difficoltà sono legate a:
- Spostare costantemente l'attenzione visiva dal testo scritto al disegno e viceversa per tenere

a mente le informazioni ottenute dal testo

- Visualizza sul disegno le informazioni geometriche rilevate dall'ipotesi
- Elaborare queste informazioni (usarle come prova)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

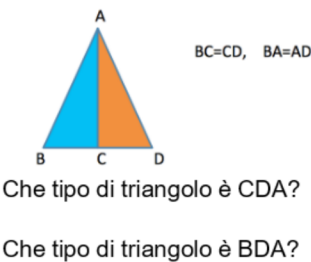
3.2 Area cognitiva e dominio matematico di interesse

L'area di difficoltà individuata attraverso il questionario B2 è relativa al dominio della Geometria.

La memoria è l'area cognitiva coinvolta.

Nella Tabella 2 l'ubicazione delle difficoltà rispetto al dominio cognitivo e all'area matematica.

Tabella 2: Le difficoltà rilevate sono legate al dominio cognitivo della Memoria e al dominio della Geometria

	Aritmetica	Geometria	Algebra
Memoria		 <p>Che tipo di triangolo è CDA?</p> <p>Che tipo di triangolo è BDA?</p>	
Ragionamento			
Visuo-spaziale			

3.3 Obiettivi educativi

Lo strumento di intervento è finalizzato alla costruzione di strategie per recuperare fatti geometrici e teoremi o proprietà, conservarli in memoria e utilizzarli per il ragionamento.

3.4 Beneficiari dell'intervento didattico (studente singolo / intera classe)

Lo strumento Intervento si articola in un'attività che deve essere svolta con lo studente o con tutta la classe.

3.5 Attività educative: lo strumento di intervento

Il punto di partenza riguardante la progettazione di questo tipo di attività educativa consiste nella seguente affermazione: il modo in cui viene presentato un testo di un'attività (ad esempio, un testo che richiede di dimostrare un teorema geometrico), influenza la memoria di lavoro e la capacità di recupero dalla memoria delle informazioni (principi UDL).

In un compito di dimostrazione geometrica, la memoria è coinvolta al fine di:

- recuperare teoremi e informazioni (vedere lo strumento interventistico "Supportare la memoria nel teorema del ricordo")
- tieni presenti le ipotesi (presentate nel testo del compito)
- strutturare un piano da dimostrare

Le attività educative di questo strumento di intervento sono concepite per supportare la metacognizione. Promuovono lo sviluppo di strategie che permettano agli studenti di supportare la memoria nella sua diversa funzione: recuperare teoremi (per inferire informazioni da utilizzare), tenere a mente le informazioni ottenute dal testo (ipotesi), ed elaborare le informazioni in ordine per raggiungere la tesi richiesta (a tal proposito si veda anche Strumenti di intervento dislocati in Area Ragionamento e Dominio Geometria).

Tenere a mente le ipotesi (presentate nel testo del compito)

Secondo Duval (1995), un disegno, su una qualche forma di supporto, in un contesto geometrico ci fornisce una rappresentazione figurale di una situazione geometrica, che è più breve e più facile da capire di una rappresentazione con linguaggio linguistico.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Pertanto, per evitare di spostare costantemente l'attenzione visiva dello studente dal testo scritto al disegno al fine di tenere a mente le informazioni ottenute dal testo, l'insegnante promuove la visualizzazione sul disegno delle informazioni ottenute in forma verbale attraverso il testo. Lo studente è pregato di riscrivere le ipotesi direttamente sul disegno scegliendo opportuni segni grafici in codice visivo non verbale. I segni rimandano a significati legati a ipotesi. Pertanto, è richiesta la transcodifica delle informazioni.

L'insegnante introduce diversi segni grafici per riscrivere le informazioni sulla figura geometrica (o, più in generale, sull'ipotesi) in forma visiva non verbale.

In altre parole, l'insegnante promuove il processo di transcodifica.

Infatti, una volta che lo studente ha identificato le ipotesi (a tal proposito, vedi anche Strumenti di intervento sul ragionamento in geometria) sul testo del compito, deve tradurle sul disegno per elaborarle per recupero del fatto geometrico (teorema). Queste meta-attività coinvolgono necessariamente aspetti visivo-spaziali. Per questo suggeriamo di considerare anche gli strumenti di Intervento riferiti all'area Visuo-spaziale nel dominio della Geometria.

I principali registri semiotici coinvolti riguardano:

-Segni grafici sul disegno

-Colori

-Utilizzo di materiale concreto per supportare la visualizzazione (come fogli trasparenti colorati Figura 1)



Figura 1: figure colorate trasparenti

Esempio di attività

COMPITO 1

Considera il triangolo isoscele ABD e C è un punto su BD che $BC = CD$. Che tipo di triangolo è CDA ? Che tipo di triangolo è BDA ?

Nota che il testo dell'attività è esclusivamente nel registro verbale.

Passaggio 1: identificazione dell'ipotesi

- Triangolo isoscele ABD
- C è un punto su BD che $BC = CD$
- A è il vertice del triangolo opposto alla base BD (ipotesi implicita)

Passaggio 2: elaborazione delle informazioni e recupero del teorema

- Disegnare un triangolo isoscele con base BD
- Triangolo isoscele ABD à $AD = AB$ e l'angolo in B è uguale all'angolo in D [questo è fatto ricordando il teorema sul triangolo isoscele].
- C è un punto su BD che $BC = CD$ à C è il punto medio di BD à C è il piede della sua altitudine rispetto alla base BD [questo viene fatto ricordando il teorema sull'altitudine nel triangolo isoscele] à AC altitudine del triangolo, relativa a BD .

Passaggio 3: processo di transcodifica



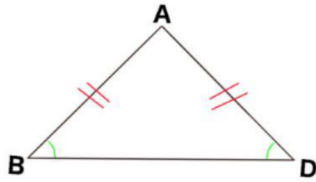
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

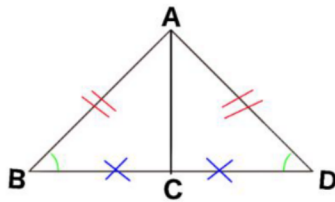


Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

1) Triangolo isoscele ABD à $AD = AB$ e l'angolo in B è uguale all'angolo in D

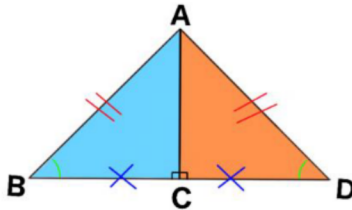


- C è un punto su BD che $BC = CD$ à C è il punto medio di BD à C è il punto medio di BD à C è il piede della sua altitudine rispetto alla base BD à AC altitudine relativa a BD del triangolo



Passaggio 4

Elaborazione del disegno per dimostrare la tesi:
Che tipo di triangolo è CDA? Che tipo di triangolo è BDA?



Si noti che i colori consentono agli studenti di identificare percettivamente le sotto-figure su cui il ragionamento deve essere focalizzato. In altre parole, i colori consentono agli studenti di eseguire l'apprensione operativa (Duval, 1995) per indagare su altre Configurazioni.

COMPITO 2

Considera il triangolo ABD nel disegno,



$BC=CD$, $BA=AD$

Che tipo di triangolo è CDA? Che tipo di triangolo è BDA?

Passaggio 1: identificare l'ipotesi



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Le ipotesi vanno individuate nel testo (triangolo ABD), nel disegno aggiunto al testo (triangoli blu e arancione e il triangolo globale ottenuto tramite triangolo arancione vicino a quello blu) e nel codice verbale aggiunto al disegno ($BC = CD$, $BA = AD$). Pertanto, il codice verbale e il codice figurativo presentano le seguenti ipotesi:

C'è un triangolo "grande" (chiamato ABD), questo è un triangolo isoscele, in questo triangolo è presente la mediana relativa alla base, definisce due triangoli (blu e arancione)

Possiamo osservare che, nel caso del disegno in bianco e nero, la visualizzazione dei due triangoli (BCA e DCA) non è percettivamente evidente come nel caso dei triangoli colorati.

L'uso dei colori diventa così uno strumento importante per:

- Informazioni presenti (ipotesi);
- Informazioni sul processo.

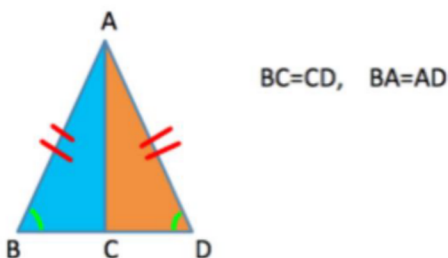
Ciò riguarda il dominio visuo-spaziale perché gli studenti interpretano e usano l'organizzazione spaziale delle rappresentazioni colorate di triangoli al fine di elaborare le informazioni e sviluppare il ragionamento sul compito geometrico (vedi Strumenti di intervento in Area visuo-spaziale della geometria)

Passaggio 2: elaborazione delle informazioni

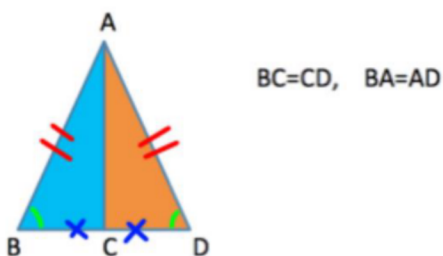
- AC è la mediana relativa alla base BD del triangolo isoscele ABD a AC è l'altitudine relativa alla base BD
- Il lato AC dei triangoli blu e arancione identifica due triangoli rettangoli

Passaggio 3: processo di transcodifica

- 2) $BC = CD$, $BA = AD$ a BDA è un triangolo isoscele



- 3) AC è la mediana e l'altitudine



- 4) I triangoli blu e arancioni sono triangoli rettangoli



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274



$BC=CD, BA=AD$

Discussione attraverso le linee guida UDL sulle attività sopra menzionate

In **rosso** i nostri commenti per illustrare la connessione tra i principi di UDL e le nostre attività.

Tabella 3: Analisi delle attività attraverso la Tabella dei principi UDL.

<i>Impegno</i>	<i>Rappresentazione</i>	<i>Azione ed espressione</i>
----------------	-------------------------	------------------------------



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

<p>Interesse di reclutamento</p> <p>Ottimizza la scelta individuale e l'autonomia Ottimizza la pertinenza, il valore e l'autenticità Riduci al minimo le minacce e le distrazioni</p>	<p>Percezione</p> <p>Offrire modi per personalizzare la visualizzazione delle informazioni</p> <p>Offrire alternative per le informazioni uditive</p> <p>Offrire alternative per le informazioni visive</p> <p>Diversi registri attraverso i quali vengono visualizzate le informazioni (visive non verbali, verbali e simboliche)</p>	<p>Azioni fisiche</p> <p>Varia i metodi di risposta e navigazione</p> <p>Ottimizza l'accesso a strumenti e tecnologie assistive</p> <p><i>Geogebra consente agli studenti di agire fisicamente sugli oggetti figurativi e fornisce loro feedback appropriati sulla loro azione</i></p>
<p>Sforzo di sostegno Persistenza</p> <p>Aumenta l'importanza degli obiettivi e degli obiettivi</p> <p>Varia le richieste e le risorse per ottimizzare la sfida</p> <p>Favorire la collaborazione e la comunità</p> <p>Aumenta il feedback orientato alla maestria</p> <p>Varia le richieste e le risorse per ottimizzare la sfida</p> <p>Favorire la collaborazione e la comunità</p> <p><i>I feedback orientati supportano l'impegno e la motivazione rispetto all'elaborazione della soluzione del compito</i></p>	<p>Linguaggio e simboli</p> <p>Chiarire il vocabolario e i simboli</p> <p>Chiarire la sintassi e la struttura</p> <p>Offrire un linguaggio e simboli alternativi per decodificare le informazioni e lavorare sulle informazioni</p> <p><i>Ciò è promosso dall'uso di diversi registri di rappresentazione: figurativo non verbale sul disegno</i></p> <p>Supportare la decodifica di testo, notazione matematica e simboli</p> <p>Promuovere la comprensione in tutte le lingue</p> <p>Illustrare attraverso più media <i>Ciò è promosso dall'uso di software di geometria dinamica come GeoGebra.</i></p> <p>Supportare la decodifica di testo, notazioni matematiche e simboli <i>Questo è promosso dalla visualizzazione di ipotesi dal registro figurale non verbale e dalla figura dinamica su GeoGebra</i></p>	<p>Expression Communication</p> <p>Usa più media per la comunicazione</p> <p>Usa più strumenti per la costruzione e la composizione</p> <p>Sviluppa fluidità con livelli graduali di supporto per la pratica e le prestazioni</p> <p>Utilizzare registri diversi per comunicare</p> <p>Il registro figurale sia in ambiente statico (foglio di carta, fogli colorati trasparenti, ...) che dinamico (GeoGebra) fornisce agli studenti di registro diverso la comunicazione e l'elaborazione delle informazioni.</p> <p>Ciò consente loro di gestire in modo più efficiente le funzioni esecutive.</p>
<p>Autoregolamentazione</p>	<p>Comprensione</p>	<p>Funzioni esecutive</p>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

<p>Promuovi aspettative e convinzioni che ottimizzano la motivazione</p> <p>Facilitare le capacità e le strategie di coping personali</p> <p>Sviluppare l'autovalutazione e la riflessione</p>	<p>Attiva o fornisci conoscenze di base</p> <p>Evidenzia modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni (punto di controllo 3.2)</p> <p>Guida all'elaborazione e alla visualizzazione delle informazioni</p> <p>Massimizza il trasferimento e la generalizzazione</p> <p><i>Per supportare la generalizzazione, le attività suggeriscono di visualizzare i disegni su GeoGebra. Infatti, la funzione di trascinamento di GeoGebra consente agli studenti di identificare invarianti della figura e recuperare il teorema adatto per sviluppare la dimostrazione richiesta.</i></p> <p>Percezione, linguaggio e simboli, comprensione (la costruzione di conoscenza utilizzabile, conoscenza accessibile per futuri processi decisionali, dipende non solo dalla percezione delle informazioni, ma da "capacità di elaborazione delle informazioni" attive)</p>	<p>Guida la definizione degli obiettivi appropriati</p> <p><i>L'uso del registro visivo della rappresentazione per visualizzare ipotesi sul disegno può essere un supporto per la memoria. Questo potrebbe supportare il processo di recupero dei teoremi e dei processi degli studenti Supportare la pianificazione e lo sviluppo della strategia Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse Migliora la capacità</i></p>
--	--	---

Guide information processing and visualization

To process information and hypotheses, tasks suggest to visualize them directly on the drawing

4. Bibliografia e sitografia

- 1) Duval, R.: (1995), Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing, in R. Sutherland and J. Mason (eds.), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- 2) Duval, R. (1998), Geometry from a cognitive point a view, in C. Mammana and V. Villani



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

(eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.

- 3) Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- 4) UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>
- 5) GeoGebra materials: <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>
- 6) <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3BuA>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.