



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

STRUMENTO DI INTERVENTO

Diseguaglianze $<$, $>$, \leq , \geq

1. Introduzione

Al fine di sviluppare una serie di attività didattiche finalizzate al confronto dei numeri decimali, si rimanda ad alcuni quadri teorici che verranno descritti nella sessione 2.

Nella sessione 3 viene descritto il disegno delle attività educative. In particolare, se le attività sono rivolte agli studenti o alla classe, la finalità didattica delle attività, l'Area Cognitiva e dominio matematico di interesse e gli Oggetti Matematici nelle aree di difficoltà individuate tramite il questionario B2.

2. Modello teorico di riferimento

I riferimenti teorici che ci hanno aiutato a progettare le seguenti attività sono:

1) **Principi di progettazione universale per l'apprendimento (UDL)** (Tabella 3), un framework concepito specificamente per progettare attività educative inclusive (<http://udlguidelines.cast.org/>).

Tabella 3: linee guida UDL

	Fornire molteplici mezzi di COINVOLGIMENTO	Fornire molteplici mezzi di RAPPRESENTAZIONE	Fornire molteplici mezzi di AZIONE ed ESPRESSIONE
	Reti Efficaci – I "PERCHÉ" dell'apprendimento	Reti di Riconoscimento – Il "COSA" dell'apprendimento	Reti Strategiche – Il "COME" dell'apprendimento
Accedere	Fornire opzioni per Catturare l'interesse: <ul style="list-style-type: none"> Ottimizzare la scelta individuale e l'autonomia Ottimizzare rilevanza, valore e autenticità Minimizzare minacce e distrazioni 	Fornire opzioni per la Percezione: <ul style="list-style-type: none"> Offrire modi di personalizzare la visualizzazione delle informazioni Offrire alternative di sollecitazioni uditive Offrire alternative per le informazioni visive 	Fornire opzioni per Azioni Fisiche: <ul style="list-style-type: none"> Variare i metodi di risposta e di movimento Ottimizzare l'accesso a strumenti e tecnologie assistive
Costruire	Fornire opzioni per Sostenere Sforzo & Persistenza <ul style="list-style-type: none"> Rafforzare l'importanza degli scopi e degli obiettivi Variare richieste e risorse per ottimizzare la sfida Promuovere collaborazione e condivisione Accrescere i <i>feedback</i> orientati alla padronanza dell'apprendimento 	Fornire opzioni per Linguaggio & Simboli <ul style="list-style-type: none"> Precisare il lessico e i simboli Precisare la sintassi e la struttura Supportare la decodifica di testo, notazioni e simboli matematici Promuovere la comprensione in tutti i linguaggi Illustrare attraverso molteplici mezzi 	Fornire opzioni per Espressione e Comunicazione: <ul style="list-style-type: none"> Usare molteplici mezzi di comunicazione Usare molteplici mezzi di costruzione e composizione Costruire fluidità nella comunicazione e mediante livelli di supporto graduati per la pratica e la prestazione
Interiorizzare	Fornire opzioni per l' auto-regolamentazione: <ul style="list-style-type: none"> Promuovere prospettive e convinzioni che ottimizzano la motivazione Facilitare capacità personali e strategie Sviluppare autovalutazione e riflessione 	Fornire opzioni per la Comprensione: <ul style="list-style-type: none"> Attivare o fornire la conoscenza del contesto Evidenziare percorsi, caratteristiche fondamentali, le grandi idee e le relazioni Guidare la visualizzazione e i processi delle conoscenze Massimizzare e trasferimento e generalizzazione delle conoscenze 	Fornire opzioni per la Funzioni Esecutive Guidare verso la definizione di obiettivi appropriati: <ul style="list-style-type: none"> Supportare lo sviluppo di pianificazioni e strategie Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse Potenziare la capacità di monitorare i progressi
Studenti esperti che sono...			
	Determinati & Motivati	Intraprendenti e Competenti	Strategici e Orientati agli obiettivi



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Il Centro per le Speciali Tecnologie Applicate (CAST) ha sviluppato un quadro completo attorno al concetto di Universal Design for Learning (UDL), con l'obiettivo di concentrare la ricerca, lo sviluppo e la pratica educativa sulla comprensione della diversità e sulla facilitazione dell'apprendimento (Edyburn, 2005). L'UDL include una serie di Principi, articolati in *Linee guida e punti di controllo*¹. La ricerca alla base della struttura di UDL è che "gli studenti sono molto variabili nella loro risposta all'istruzione. [...]"

Pertanto, l'UDL si concentra su queste differenze individuali come elemento importante per comprendere e progettare istruzioni efficaci per l'apprendimento.

A questo scopo, l'UDL propone tre Principi fondamentali: 1) fornire molteplici mezzi di rappresentazione, 2) fornire molteplici mezzi di azione ed espressione, 3) fornire molteplici mezzi di coinvolgimento. In particolare, le linee guida all'interno del primo principio si riferiscono ai mezzi di percezione coinvolti nel ricevere determinate informazioni e di "comprensione" delle informazioni ricevute. Le linee guida all'interno del secondo principio tengono conto dell'elaborazione di informazioni/idee e della loro espressione. Infine, le linee guida all'interno del terzo principio trattano il dominio dell'"affetto" e della "motivazione", anch'essi essenziali in ogni attività educativa.

Per le nostre analisi ci concentreremo in particolare su linee guida specifiche all'interno dei tre Principi. Le linee guida all'interno del Principio 1 (forniscono più mezzi di rappresentazione), suggeriscono di proporre diverse opzioni di percezione e di offrire supporto per la decodifica di notazioni e simboli matematici. Inoltre, le linee guida suggeriscono l'importanza di fornire opzioni per la comprensione evidenziando modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni tra nozioni matematiche. Infine, le nostre analisi forniranno esempi di come il software AlNuSet possa guidare l'elaborazione, la visualizzazione e la manipolazione delle informazioni, al fine di massimizzare il trasferimento e la generalizzazione.

Inoltre, le linee guida del Principio 2 (forniscono molteplici mezzi di azione ed espressione) suggeriscono di offrire diverse opzioni di espressione e comunicazione a supporto della pianificazione e dello sviluppo della strategia. Infine, le linee guida del Principio 3 mostrano come determinate attività possono reclutare l'interesse degli studenti, ottimizzando la scelta e l'autonomia individuali e riducendo al minimo le minacce e le distrazioni.

Nella sezione 4 analizzeremo esempi di attività, classificandole sia per il tipo di apprendimento matematico che sono progettate sia per l'area cognitiva che supportano. Mostriamo come questi esempi siano stati progettati sui principi UDL al fine di renderli inclusivi ed efficaci per superare le difficoltà matematiche individuate attraverso il questionario B2.

2) Inoltre ci riferiamo all'esperienza del Progetto Europeo **FaSMed** che si focalizza sulla valutazione formativa in matematica e scienze, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

La valutazione formativa (VF) è concepita come un metodo di insegnamento in cui "l'evidenza circa i risultati dello studente è ottenuta, interpretata e usata da insegnanti, studenti e dai loro pari per prendere decisioni sui passi successivi da compiere nell'istruzione che possono essere migliori o meglio fondati rispetto alle decisioni che sarebbero state prese in assenza dell'evidenza che è stata ottenuta" (Black & William, 2009, p. 7).

Il progetto FaSMed fa riferimento agli studi di William e Thompson del 2007, che identificano cinque strategie chiave per la pratica della VF in ambito scolastico: (a) *Chiarire e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo*; (b) *progettare discussioni efficaci in classe e altre attività di apprendimento che producano evidenza della comprensione degli studenti*; (c) *fornire feedback che facciano progredire gli studenti*; (d) *far sì che gli studenti siano risorse di apprendimento uno per l'altro*; (e) *far sì che gli studenti siano padroni del loro apprendimento*. L'insegnante, i compagni e lo studente stesso sono gli artefici della messa in atto di queste strategie di VF.

¹ Per una lista completa di questi principi, linee guida e punti di controllo a una descrizione più vasta delle attività di CAST, visitare il sito <http://www.udlcenter.org/>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Tabella 4: Strategia per la valutazione formativa

	Dove sta andando lo studente	Dov'è lo studente adesso	Come arrivare
Insegnante	<p>1 Chiarire gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo</p> <p>Comprendere e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo</p>	<p>2 Progettare discussioni efficaci in classe e altre attività di apprendimento che producano evidenza della comprensione degli studenti</p>	<p>3 Fornire <i>feedback</i> che facciano progredire gli studenti</p>
Pari	<p>Comprendere e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo</p>	<p>4 Far sì che gli studenti siano risorse di apprendimento uno per l'altro</p>	
Studente	<p>Comprendere e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo</p>	<p>5 Far sì che gli studenti siano padroni del loro apprendimento</p>	

Le attività FaSMed sono organizzate in sequenza, comprendono lavori di gruppo su fogli di lavoro, discussioni di classe dove i lavori di gruppo selezionati sono discussi dalla classe intera, sotto la direzione del docente. Tenendo conto delle strategie della valutazione formativa e delle funzionalità tecnologiche, Cusi, Morselli & Sabena (2017, p. 758) hanno ideato tre tipi di fogli di lavoro per le attività in classe:

- (1) *Fogli di lavoro per Problema*: fogli di lavoro che introducono un problema e propongono una o più domande che coinvolgono l'interpretazione o la costruzione della rappresentazione (verbale, simbolica, grafica e tabulare) della relazione matematica tra due variabili (e.g. interpretare un grafico tempo - distanza);
- (2) *Fogli di lavoro di Aiuto*: concepiti per supportare gli studenti che incontrano difficoltà con il *foglio di lavoro per problema* proponendo specifici suggerimenti (e.g. domande guidate);
- (3) *Foglio di lavoro per Sondaggio*: fogli di lavoro che suggeriscono un sondaggio tra diverse opzioni.

Gli autori hanno identificato delle strategie di *feedback* che l'insegnante può adottare per fornire un riscontro agli studenti (Cusi, Morselli & Sabena, 2018, p. 3466). Queste strategie sono impiegate nella discussione in classe organizzata dal docente dopo il lavoro di gruppo:

Tabella 5:

Ridare voce	Quando l'insegnante fa da specchio ad un intervento di un alunno in modo da richiamare l'attenzione su di esso. Spesso, durante l'attività di <i>ridare voce</i> , l'insegnante sottolinea con l'intonazione della voce alcune parole della frase che sta ripetendo.
Riformulare	<p>La riformulazione si ha quando il docente riformula l'intervento di uno studente, con il doppio scopo di richiamare l'attenzione della classe e rendere l'intervento più intellegibile a tutti.</p> <p>La riformulazione avviene quando l'insegnante avverte che l'intervento può essere utile ma necessita di essere comunicato in un modo migliore per diventare una risorsa per gli altri. [...]. Le strategie del ridare voce e riformulare trasformano uno studente (l'autore dell'intervento) in una risorsa per la classe.</p>
Riformulare con una struttura	Quando il docente, oltre a riformulare, aggiunge alcuni elementi per guidare il lavoro degli studenti.
Rilanciare	Quando il docente reagisce all'intervento dello studente, che considera interessante per la classe, non dando un <i>feedback</i> diretto, ma ponendo una domanda connessa. In questo modo, attraverso "il rilancio" l'insegnante fornisce un <i>feedback</i> implicito [...] all'intervento dello studente, suggerendo che l'argomento è interessante e prezioso da approfondire o, al contrario, che ha qualche punto problematico e dovrebbe



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

	essere rivisto.
Contrastare	Il contrastare prende piede quando il docente richiama l'attenzione su due o più interventi, che rappresentano due differenti posizioni, così da promuovere un confronto. Dal contrasto, [...] gli autori delle due posizioni possono essere una risorsa per la classe così come essere responsabili del proprio apprendimento.

Traiamo dall'esperienza FaSMEd l'idea di creare attività in classe nella prospettiva della valutazione formativa, che possa favorire l'inclusione.

3. Progettazione

3.1 Difficoltà identificate attraverso il questionario B2

Rileviamo difficoltà nella seguente voce di B2:

Nell'area dei numeri principali, mentre ordinano i numeri dal più piccolo al più grande, gli studenti spesso hanno difficoltà a decidere quali numeri sono maggiori o minori ed essere in grado di risolvere le disuguaglianze

3.2 Area cognitiva e dominio matematico interessati

L'area di difficoltà individuata attraverso il questionario B2 è relativa al dominio dell'*Aritmetica*. In particolare, le difficoltà sono legate all'ordinamento dei numeri razionali sulla linea numerica. Quindi, *Visivo-spaziale* è l'area cognitiva coinvolta.

3.3 Obiettivi educativi

Lo scopo di questa attività è promuovere la comprensione di quale sia il numero o maggiore o minore di un dato numero o variabile.

3.4 Beneficiari dell'intervento didattico (studente singolo/intera classe)

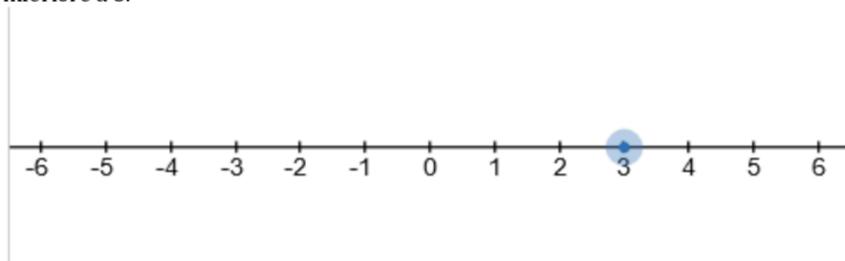
Lo strumento di intervento può essere rivolto al singolo studente.

3.5 Attività didattica: lo strumento di intervento

Sarebbe meglio se gli studenti avessero accesso ai computer o ai tablet e potessero svolgere l'attività online utilizzando il sito web www.desmos.com (<http://tiny.cc/2bdysz>). Tuttavia, questa attività può essere eseguita anche utilizzando copie cartacee e una lavagna con pennarelli. L'uso di strumenti e software interattivi aiuterà a chiarire il vocabolario e supporterà la decodifica dei simboli $<$, $>$, \leq , \geq (linee guida UDL).

Ogni studente svolge le seguenti attività individualmente:

1) Trascina o disegna il punto blu in una posizione sulla linea numerica che indica un numero che è inferiore a 3.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

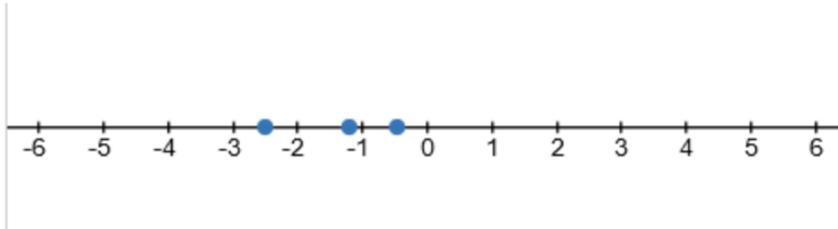
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

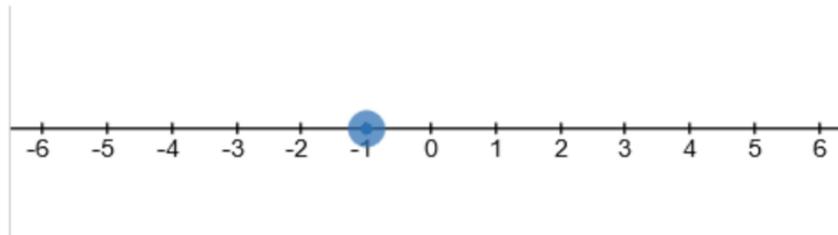
- 2) Trascina o disegna il punto blu in UN ALTRO punto sulla linea numerica che indica un numero che è inferiore a 3.
- 3) Trascina o disegna il punto blu su UN ALTRO punto sulla linea numerica che indica un numero che è inferiore a 3.

Quindi, l'insegnante chiede agli studenti di guardare la linea sulla lavagna e posizionare i loro punti. Il grafico che creano mostra tutti i punti che gli studenti e i loro compagni di classe hanno posizionato.

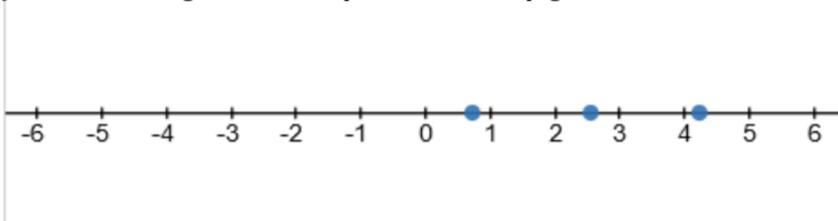


Successivamente, gli studenti svolgono individualmente la seguente attività.

- 1) Trascina o disegna ogni punto blu in una posizione sulla linea numerica che indica un numero che è maggiore di -1.



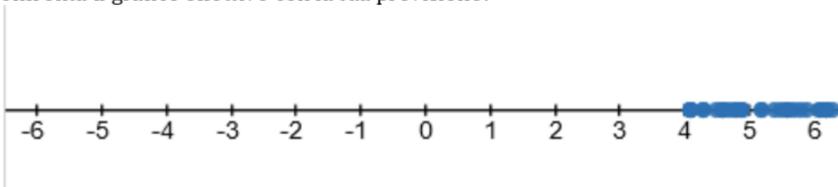
- 2) Come sarebbe il grafico se tutti i punti dei tuoi compagni di classe fossero mostrati insieme ai tuoi?



(il grafico sopra presenta una risposta ipotetica di uno studente)

Gli studenti dovrebbero notare che la linea sarebbe coperta da punti blu a destra di -1

Successivamente, l'insegnante mostra agli studenti il seguente grafico e chiede agli studenti "Come si confronta il grafico effettivo con la tua previsione?"



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

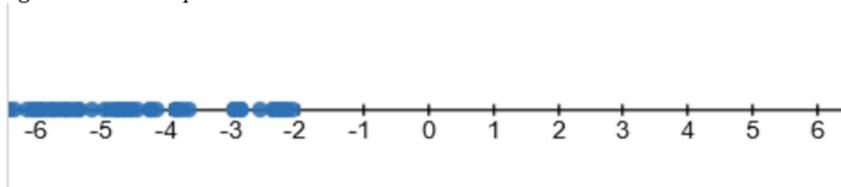


Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Gli studenti discutono in gruppi dando le loro idee.

Quindi l'insegnante assegna loro il seguente compito.

Ecco i risultati delle lezioni di un'altra sfida. "Trascina ogni punto in un punto della linea numerica che indica un numero che è ..." Come finiresti quelle direzioni in modo che un gruppo di studenti produca un grafico simile a questo?



Gli studenti identificano i numeri sulla linea e cercano di elaborare la regola. In questo modo sentiranno di essere i proprietari del loro apprendimento e si sentiranno più sicuri.

Per assicurarsi che gli studenti abbiano compreso appieno il confronto dei numeri, giocano a un gioco di abbinamento. Devono ordinare le carte in gruppi di tre. (Dovrebbero essere rimaste due carte). L'insegnante spiega che gli studenti devono abbinare la rappresentazione grafica sulla linea al simbolo di disuguaglianza o un'espressione.

a number less than 4

a number less than -3

$n < 0$

a number greater than 0

$n > 4$

$n < -3$

$n > 0$

$n < 4$

a number greater than -2

$n > -2$

Dopo aver risolto il compito, l'insegnante chiede agli studenti se la direzione della freccia nei simboli di disuguaglianza $<$ o $>$ può aiutarli a decidere quali numeri sono minori o maggiori di un dato numero. Gli studenti discutono e quindi approfondiscono la propria comprensione. Condivideranno anche un vocabolario comune e una rappresentazione grafica. (FasMEd)

Il prossimo compito è assicurarsi che gli studenti notino la differenza tra i simboli " $<$ " "Minore di" e " \leq " "minore o uguale a"

Gli studenti guardano due diagrammi a linee numeriche. Discutono di quanto segue: "In che modo sono simili? Come sono differenti?". Questo creerà discussioni in classe efficaci e altri compiti di apprendimento che suscitano prove di comprensione da parte degli studenti. Gli studenti verranno anche a condividere un vocabolario comune e una rappresentazione grafica comune. (FasMEd)

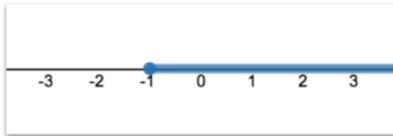


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

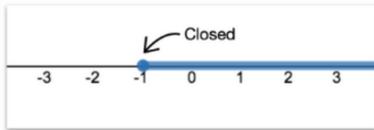
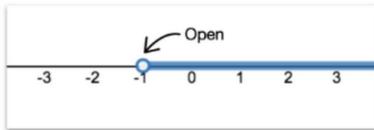
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274



L'insegnante fornisce loro un feedback: "Il punto aperto (sopra) significa che -1 non è incluso. Il punto chiuso (sotto) significa che lo è."



Per assicurarsi che gli studenti abbiano pienamente compreso la differenza tra $<$, $>$, \leq , \geq , giocano a un gioco di abbinamento. Devono ordinare le carte in gruppi di tre. (Dovrebbero essere rimaste due carte.)

Match each expression with its number line graph.

$x \leq 1$	$x > -2$		
	$x \geq -2$	$x > 1$	$x \leq -2$
	$x < 1$		

Infine, in gruppo o in coppia, gli studenti analizzano quanto segue e rispondono alla domanda: quale di queste relazioni sembra diversa dalle altre? In altre parole, quale non appartiene?

$x > -2$	$3 < x$
$x \leq 4$	$5 > 6$



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Gli studenti discutono per trovare le proprie risposte. Questa è la risposta del modello:

- **In alto a sinistra** ($x > -2$): l'unico che include zero e tutti i numeri positivi.
- **In alto a destra** ($3 < x$): l'unico che ha la variabile a destra.
- **In basso a sinistra** ($x \leq 4$): l'unico che include il suo punto finale.
- **In basso a destra** ($5 > 6$): l'unico che è sempre falso.

5. Bibliografia e sitografia

- [1] Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141. <https://doi.org/10.1080/19404158.2017.1289963>
- [2] Workshop with Dr. Giannis Karagianakis in International
- [3] European Project FasMed (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).
- [4] Universal design for learning (UDL) principles (<http://udlguidelines.cast.org/>)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.