



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

## Materiały do pracy z uczniami

# Upraszczenie wyrażeń algebraicznych

### 1. Wstęp

W celu opracowania zestawu działań edukacyjnych mających na celu rozwiązanie problemów, które dotyczą upraszczania wyrażeń algebraicznych z dodawaniem/odejmowaniem jednomianów, odwołujemy się do kilku istotnych teorii, które zostaną opisane w sesji 2. W sekcji 3 opisano projekt zajęć edukacyjnych. Opisano w szczególności, czy zajęcia są skierowane do jednego ucznia, czy do całej klasy, jaki jest cel edukacyjny zajęć, obszar poznawczy i dziedzina matematyki oraz jakich obszarów trudności zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2 zadania dotyczą.

### 2. Wprowadzenie teoretyczne

Teoretyczne odniesienia, które pomogły nam skonstruować materiały do pracy z uczniami, to:

1) Zasady UDL (**Universal Design for Learning**), będące wytycznymi stworzonymi specjalnie do projektowania włączających działań edukacyjnych (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Zasady UDL

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESJI
	"dlaczego" się uczyć	"czego" się uczyć	"jak" się uczyć
Dostęp	<b>Wzbudzanie zainteresowania:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię</li> <li>Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność</li> <li>Ograniczaj zagrożenia i elementy rozpraszcające</li> </ul>	<b>Postrzeżenie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji</li> <li>Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio</li> <li>Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych</li> </ul>	<b>Działania fizyczne:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu</li> <li>Zapewnij optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających</li> </ul>
Tworzenie	<b>Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Zwiększ znaczenie celów i zadań</li> <li>Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie</li> <li>Wspieraj współpracę i poczucie przynależności</li> <li>Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału</li> </ul>	<b>Język i symbole:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Wyjaśniaj słownictwo i symbole</li> <li>Wyjaśniaj składnię i budowę zdań</li> <li>Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli</li> <li>Propaguj zrozumienie w różnych językach</li> <li>Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu</li> </ul>	<b>Ekspresja i komunikacja:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Używaj różnorodnych metod komunikacji</li> <li>Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia</li> <li>Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności</li> </ul>
Stosowanie	<b>Samoregulacja:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację</li> <li>Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami</li> <li>Rozwijaj samoocenę i refleksję</li> </ul>	<b>Rozumienie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Uaktywniaj lub zapewnij posiadaną wiedzę podstawową</li> <li>Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeżenie związków</li> <li>Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją</li> <li>Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację</li> </ul>	<b>Funkcja wykonawcza:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów</li> <li>Wspieraj planowanie i rozwój strategii</li> <li>Ułatwaj zarządzanie informacjami i zasobami</li> <li>Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów</li> </ul>
	<b>Wykreowanie uczniów, którzy....</b>		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są zaradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel

Centrum Specjalnej Technologii Stosowanej (CAST) opracowało kompleksowe ramy dotyczące koncepcji UDL, mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się (Edyburn, 2005). UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w wytycznych i punktach kontrolnych. Badania, na których opiera się struktura UDL, wskazują, że „uczniowie bardzo różnie reagują na instrukcje. [...]” Dlatego UDL koncentruje się na tych indywidualnych różnicach jako na ważnym elemencie zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) zapewnienie różnorodnych środków prezentacji, 2) zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji, 3) zapewnienie różnorodnych środków angażujących. W szczególności wytyczne w ramach pierwszej zasady dotyczą środków percepcji związanych z otrzymywaniem pewnych informacji oraz „rozumienia” otrzymanych informacji. Zamiast tego, wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji i pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą domeny „afektu” i „motywacji”, które są również istotne w każdej działalności edukacyjnej. W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach tych trzech zasad<sup>1</sup>.

Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewnienie różnorodnych sposobów prezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Co więcej, wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie zrozumienia wzorców, cech wyróżniających, oryginalnych pomysłów i związków między pojęciami matematycznymi. Wreszcie, nasze analizy dadzą przykłady, w jaki sposób oprogramowanie AINuSet może kierować przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia. Co więcej, wytyczne zawarte w Zasadzie 2 (zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenia i elementy rozprasające.

W części 4 przeanalizujemy przykłady działań, klasyfikując je zarówno według typu uczenia matematycznego, jak i obszaru poznawczego, które wspierają. Pokażemy, jak te przykłady zostały zaprojektowane zgodnie z zasadami UDL, aby były działaniami włączającymi i skutecznymi w przewyżczeniu trudności matematycznych zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

2) Europejski projekt FasMed, który skupiał się na ocenianiu kształtującym w matematyce i naukach ścisłych, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

Ocenianie kształtujące (FA) jest pomyślane jako metoda nauczania, w której „nauczyciele, uczniowie lub ich rówieśnicy gromadzą, interpretują i wykorzystują dowody dotyczące osiągnięć uczniów, aby podejmować decyzje dotyczące kolejnych kroków w nauczaniu, które prawdopodobnie będą lepsze, lub lepiej uzasadnione, niż decyzje, które podjęliby w przypadku braku zebranych dowodów” (Black i Wiliam, 2009, s. 7). Projekt FaSMEd odnosi się do badania Wiliama i Thompsona (2007), które identyfikuje pięć kluczowych strategii oceniania kształtującego w środowisku szkolnym: (a) wyjaśnianie i dzielenie się zamiarami uczenia się i kryteriami sukcesu; (b) opracowywanie skutecznych dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dostarczają dowodów na zrozumienie przez uczniów; (c) dostarczanie informacji zwrotnych, które pomagają uczniom czynić postępy; (d) aktywizowanie uczniów, aby uczyli siebie nawzajem; (e) aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki. Nauczyciel, rówieśnicy ucznia i sam uczeń są autonomicznymi jednostkami, które aktywują te strategie oceniania kształtującego.

Table 4: Formative assessment strategies

	Gdzie mierza uczeń	Gdzie uczeń jest teraz	Jak tam dotrzeć
<b>Nauczyciel</b>	1 Wyjaśnienie zamiarów uczenia się i kryteriów sukcesu	2 Zaaranżowanie efektywnej dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dają dowody zrozumienia przez uczniów	3 Dostarczanie informacji zwrotnych, które pomagają uczniom czynić postępy
<b>Rówieśnik</b>	Zrozumienie i dzielenie się zamiarami uczenia się i kryteriami sukcesu	4 aktywizowanie uczniów, aby uczyli siebie nawzajem	
<b>Uczeń</b>	Zrozumienie zamiarów uczenia się i kryteriów sukcesu	5 aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki	

Ćwiczenia FaSMEd zostały zorganizowane w sekwencję, która obejmuje pracę grupową nad arkuszami roboczymi i dyskusję w klasie, podczas której wybrane prace grupowe są omawiane przez

<sup>1</sup> The items are taken from the interactive list at <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

całą klasę przy wsparciu nauczyciela. Biorąc pod uwagę strategie oceny kształtującej i funkcje technologiczne, Cusi, Morselli i Sabena (2017, s. 758) zaprojektowali trzy rodzaje arkuszy roboczych do zajęć w klasie:

“(1) *arkusze zadań: arkusze wprowadzające problem i zadające jedno lub więcej pytań dotyczących interpretacji lub konstrukcji reprezentacji (werbalnej, symbolicznej, graficznej, tabelarycznej) relacji matematycznej między dwiema zmiennymi (np. interpretacja wykresu czas-odległość);*

(2) *arkusze pomocnicze, mające na celu wsparcie uczniów, którzy napotykają trudności z arkuszami zadań poprzez przedstawianie konkretnych sugestii (np. pytania pomocnicze);*

(3) *arkusze ankietowe: arkusze z pytaniami o ankietę wśród proponowanych opcji”.*

Autorzy zidentyfikowali strategie informacji zwrotnej (tabela 5), które nauczyciel może zastosować, aby przekazać uczniom informację zwrotną (Cusi, Morselli i Sabena, 2018, s.3466). Strategie te są wykorzystywane podczas dyskusji w klasie, która jest organizowana przez nauczyciela po pracy grupowej nad arkuszami roboczymi.

Table 5:

Powtórzenie	Kiedy nauczyciel naśladuje wypowiedź jednego ucznia, aby zwrócić na nią uwagę. Często podczas powtórzenia nauczyciel akcentuje intonacją głosu niektóre kluczowe słowa zdania, które powtarza po uczniu. Zmiana sformułowania ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułuje wypowiedź jednego ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i sprawienie by była bardziej zrozumiałą dla wszystkich.
Przeformułowanie	Przeformułowanie ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułuje wypowiedź jednego ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i uczynienie jej bardziej zrozumiałej dla wszystkich. Przeformułowanie jest stosowane, gdy nauczyciel uważa, że informacja może być przydatna, ale należy ją lepiej przekazać, aby stała się źródłem wiedzy dla innych. [...] Strategie powtórzenia i przeformułowania [...] zmieniają jednego ucznia (autora wypowiedzi) w źródło wiedzy dla klasy.
Przeformułowanie z materiałem pomocniczym	Kiedy nauczyciel, oprócz przeformułowania, dodaje elementy, które wspomagają pracę uczniów.
Ponowne uruchomienie	Kiedy nauczyciel reaguje na wypowiedź ucznia, którą uważa za interesującą dla klasy, nie udziela bezpośredniej informacji zwrotnej, ale stawia powiązane pytanie. W ten sposób, poprzez ponowne uruchomienie, nauczyciel dostarcza ukrytej informacji zwrotnej [...] na temat wypowiedzi ucznia, sugerując, że kwestia jest interesująca i warta pogłębienia lub, przeciwnie, ma pewne problematyczne punkty i należy ją przerobić.
Kontrastowanie	Kontrastowanie ma miejsce, gdy nauczyciel zwraca uwagę na dwie lub więcej wypowiedzi, przedstawiając dwie różne pozycje, aby ułatwić porównanie. Dzięki temu [...] autorzy obu wypowiedzi mogą być dla klasy źródłem wiedzy, a także stają się odpowiedzialni za własną naukę.

Z doświadczenia FaSMEd czerpiemy pomysł tworzenia zajęć w klasie w perspektywie oceniania kształtującego, co może sprzyjać integracji.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

### 3.1 Opis projektu

#### 3.1. Trudności zidentyfikowane za pomocą kwestionariusza B2

Wykrywamy trudności w następującym punkcie B2:

1. Uprość wyrażenie:

a)  $a \times a = \underline{\hspace{2cm}}$

e)  $\sqrt[2]{a^3} = a^{\underline{\hspace{1cm}}}$

b)  $a + a = \underline{\hspace{2cm}}$

f)  $a + 2a = \underline{\hspace{2cm}}$

c)  $2a : a = \underline{\hspace{2cm}}$

g)  $ax(b+c) = \underline{\hspace{3cm}}$

d)  $\frac{2a}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$

Trudności te są związane z uproszczeniem wyrażeń algebraicznych.

#### 3.2. Dziedzina poznawcza i dziedzina matematyki.

Obszar trudności zidentyfikowany za pomocą kwestionariusza B2 jest powiązany z dziedziną algebry. W szczególności trudności związane są z uproszczeniem wyrażeń algebraicznych. Zatem zaangażowanymi obszarami poznawczymi są pamięć i wizualizacja przestrzenna.

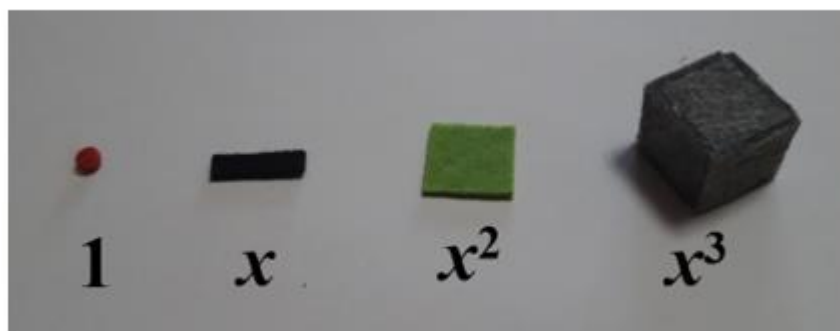
#### 3.3. Cele edukacyjne.

Materiał ma na celu uproszczenie wyrażeń algebraicznych poprzez dodawanie / odejmowanie jednomianów przy użyciu materiałów, którymi można wizualizować działania.

#### 3.4. Materiały do pracy mają być skierowane do małych grup.

#### 3.5. Działania edukacyjne: zastosowanie materiałów.

Nauczyciel zapoznaje uczniów z materiałami do wykorzystania i ich symboliką:



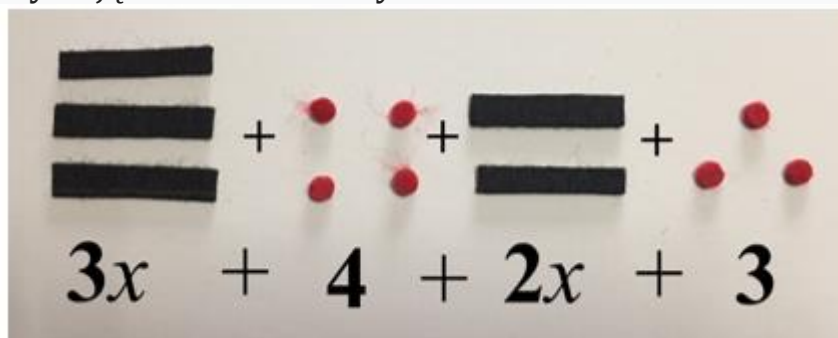
Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

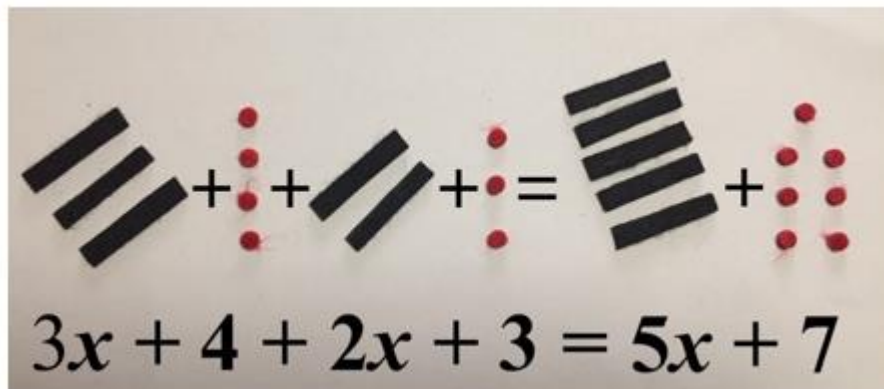


Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Następnie nauczyciel pisze na tablicy wyrażenie algebraiczne  $3x + 4 + 2x + 3$  i prosi uczniów, aby przedstawili to samo wyrażenie, używając materiałów i symboli.



Po zapoznaniu się z zestawem symboli uczeń powinien napisać wyrażenie matematyczne i uprościć je.



Ten sam proces zostanie użyty do uproszczenia innych wyrażeń algebraicznych, takich jak



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

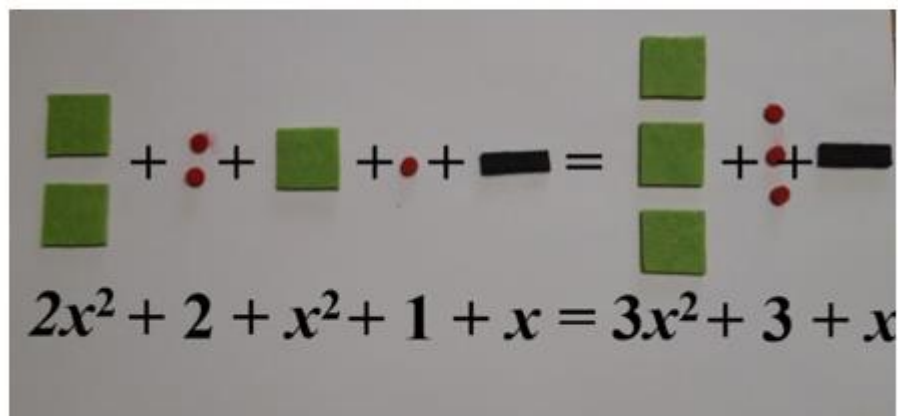
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.





Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

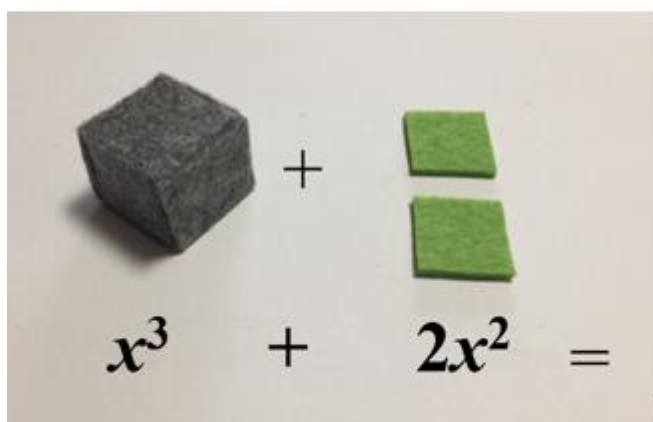
$$2x^2 + 2 + x^2 + 1 + x$$



Uczniowie mogą uprościć więcej wyrażeń, używając podanych materiałów:

- $2x^2 + 1 + x^2 + 4$
- $2x^3 + x^2 + 3x + 1 + 2x^2 + 3$

Po tym, jak uczniowie uprościć poprzednie wyrażenia, nauczyciel przedstawia nowe wyrażenie i prosi uczniów o uproszczenie  $x^3 + 2x^2$ .



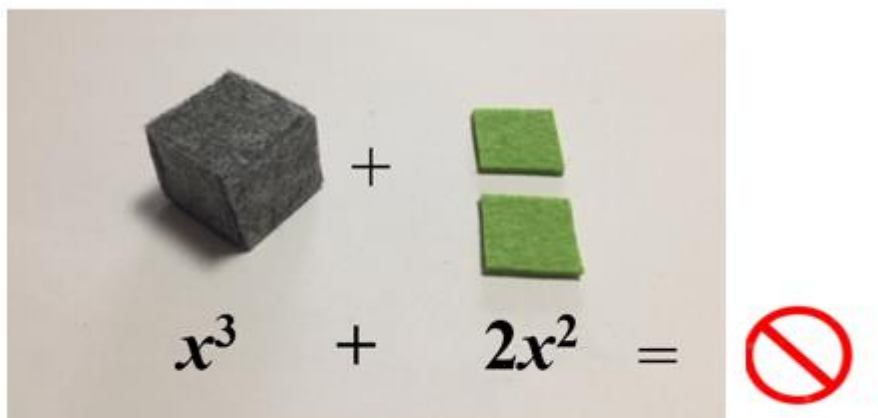
Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Jeszcze raz, posługując się symbolami, uczniowie powinni dojść do wniosku, że nie ma możliwości uproszczenia danego wyrażenia.



Na koniec nauczyciel prosi uczniów o uproszczenie wyrażenia  $3x^3 - x^3$ .



#### 4. Bibliografia

- [1] Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141. [\](#)
- [2] Workshop with Dr. Giannis Karagianakis in International Congress of math learning difficulties, in Lisbon, 7,8/02/2020
- [3] Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.
- [4] Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in education*, 5(1), 7-74.
- [5] Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics Part 2: feedback. *Equals: Mathematics and Special Educational Needs*, 5(3), 8-11
- [6] European Project FasMed (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>)
- [7] Universal design for learning (UDL) principles (<http://udlguidelines.cast.org/>)



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.