Materiały do pracy z uczniami

Zrozumienie roli, jaką odgrywają litery i cyfry w algebrze.

1. Wstęp

W celu opracowania zestawu działań edukacyjnych mających na celu rozwiązanie problemów, które dotyczą zrozumienia roli, jaką odgrywają litery i cyfry w algebrze, odwołujemy się do kilku istotnych teorii, które zostaną opisane w sesji 2. W sekcji 3 opisano projekt zajęć edukacyjnych. Opisano w szczególności, czy zajęcia są skierowane do jednego ucznia, czy do całej klasy, jaki jest cel edukacyjny zajęć, obszar poznawczy i dziedzina matematyki oraz jakich obszarów trudności zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2 zadania dotyczą.

2. Wprowadzenie teoretyczne

Teoretyczne odniesienia, które pomogły nam skonstruować materiały do pracy z uczniami, to:

1) Zasady UDL (**Universal Design for Learning), będące** wytycznymi stworzonymi specjalnie do projektowania włączających działań edukacyjnych ([http://udlguidelines.cast.org/)](http://udlguidelines.cast.org/)

Tabela 3: Zasady UDL

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESII
	"dlaczego" się uczę	"czego" się uczę	"jak" się uczę
Dostęp	**Wzbudzanie zainteresowania**: • Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię • Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność • Ograniczaj zagrożenia i elementy rozpraszające	**Postrzeganie:** • Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji • Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio • Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych	**Działania fizyczne**: • Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu • Zapewniaj optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających
Tworzenie	**Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości**: • Zwiększ znaczenie celów i zadań • Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie • Wspieraj współpracę i poczucie przynależności • Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału	**Język i symbole**: • Wyjaśniaj słownictwo i symbole • Wyjaśniaj składnię i budowę zdań • Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli • Propaguj zrozumienie w różnych językach • Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu	**Ekspresja i komunikacja**: • Używaj różnorodnych metod komunikacji • Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia • Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności
Stosowanie	**Samoregulacja:** • Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację • Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami • Rozwijaj samoocenę i refleksję	**Rozumienie**: • Uaktywniaj lub zapewniaj posiadaną wiedzę podstawową • Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeganie związków • Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją • Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację	**Funkcja wykonawcza**: • Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów • Wspieraj planowanie i rozwój strategii • Ułatwiaj zarządzanie informacjami i zasobami • Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów
	Wykreowanie uczniów, którzy….		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są zaradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel

Centrum Specjalnej Technologii Stosowanej (CAST) opracowało kompleksowe ramy dotyczące koncepcji UDL, mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się (Edyburn, 2005). UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w wytycznych i punktach kontrolnych. Badania, na

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

których opiera się struktura UDL, wskazują, że „uczniowie bardzo różnie reagują na instrukcje. [...] " Dlatego UDL koncentruje się na tych indywidualnych różnicach jako na ważnym elemencie zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.
W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) zapewnienie różnorodnych środków prezentacji, 2) zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji, 3) zapewnienie różnorodnych środków angażujących. W szczególności wytyczne w ramach pierwszej zasady dotyczą środków percepcji związanych z otrzymywaniem pewnych informacji oraz „zrozumienia" otrzymanych informacji. Zamiast tego, wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji i pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą domeny „afektu" i „motywacji", które są również istotne w każdej działalności edukacyjnej. W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach tych trzech zasad [1].
Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewnienie różnorodnych sposobów prezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Co więcej, wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie zrozumienia wzorców, cech wyróżniających, oryginalnych pomysłów i związków między pojęciami matematycznymi. Wreszcie, nasze analizy dadzą przykłady, w jaki sposób oprogramowanie AlNuSet może kierować przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia. Co więcej, wytyczne zawarte w Zasadzie 2 (zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenia i elementy rozpraszające.
W części 4 przeanalizujemy przykłady działań, klasyfikując je zarówno według typu uczenia matematycznego, jak i obszaru poznawczego, które wspierają. Pokażemy, jak te przykłady zostały zaprojektowane zgodnie z zasadami UDL, aby były działaniami włączającymi i skutecznymi w przezwyciężaniu trudności matematycznych zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

2) Europejski projekt FasMed, który skupiał się na ocenianiu kształtującym w matematyce i naukach ścisłych, (https://research.ncl.ac.uk/fasmed/).
Ocenianie kształtujące (FA) jest pomyślane jako metoda nauczania, w której „nauczyciele, uczniowie lub ich rówieśnicy gromadzą, interpretują i wykorzystują dowody dotyczące osiągnięć uczniów, aby podejmować decyzje dotyczące kolejnych kroków w nauczaniu, które prawdopodobnie będą lepsze, lub lepiej uzasadnione, niż decyzje, które podjęliby w przypadku braku zebranych dowodów "(Black i Wiliam, 2009, s. 7). Projekt FaSMEd odnosi się do badania Wiliama i Thompsona (2007), które identyfikuje pięć kluczowych strategii oceniania kształtującego w środowisku szkolnym: (a) wyjaśnianie i dzielenie się zamiarami uczenia się i kryteriami sukcesu; (b) opracowywanie skutecznych dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dostarczają dowodów na zrozumienie przez uczniów; (c) dostarczanie informacji zwrotnych, które pomagają uczniom czynić postępy; (d) aktywizowanie uczniów, aby uczyli siebie nawzajem; (e) aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki. Nauczyciel, rówieśnicy ucznia i sam uczeń są autonomicznymi jednostkami, które aktywują te strategie oceniania kształtującego.

Table 4: Formative assessment strategies

	Gdzie zmierza uczeń	**Gdzie uczeń jest teraz**	**Jak tam dotrzeć**
Nauczyciel	**1** Wyjaśnienie zamiarów uczenia się i kryteriów sukcesu Zrozumienie i dzielenie się	**2** Zaaranżowanie efektywnej dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dają dowody zrozumienia przez uczniów	**3** Dostarczanie informacji zwrotnych, które pomagają uczniom czynić postępy

[1] The items are taken from the interactive list at http://www.udlcenter.org/research/researchevidence

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Rówieśnik	zamiarami uczenia się i kryteriami sukcesu	**4** aktywizowanie uczniów, aby uczyli siebie nawzajem
Uczeń	Zrozumienie zamiarów uczenia się i kryteriów sukcesu	**5** aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki

Ćwiczenia FaSMEd zostały zorganizowane w sekwencję, która obejmuje pracę grupową nad arkuszami roboczymi i dyskusję w klasie, podczas której wybrane prace grupowe są omawiane przez całą klasę przy wsparciu nauczyciela. Biorąc pod uwagę strategie oceny kształtującej i funkcje technologiczne, Cusi, Morselli i Sabena (2017, s. 758) zaprojektowali trzy rodzaje arkuszy roboczych do zajęć w klasie:

> "(1) *arkusze zadań: arkusze wprowadzające problem i zadające jedno lub więcej pytań dotyczących interpretacji lub konstrukcji reprezentacji (werbalnej, symbolicznej, graficznej, tabelarycznej) relacji matematycznej między dwiema zmiennymi (np. interpretacja wykresu czas-odległość)*;
>
> (2) *arkusze pomocnicze, mające na celu wsparcie uczniów, którzy napotykają trudności z arkuszami zadań poprzez przedstawianie konkretnych sugestii (np. pytania pomocnicze);*
>
> (3) *arkusze ankietowe: arkusze z pytaniami o ankietę wśród proponowanych opcji*".

Autorzy zidentyfikowali strategie informacji zwrotnej (tabela 5), które nauczyciel może zastosować, aby przekazać uczniom informację zwrotną (Cusi, Morselli i Sabena, 2018, s.3466). Strategie te są wykorzystywane podczas dyskusji w klasie, która jest organizowana przez nauczyciela po pracy grupowej nad arkuszami roboczymi.

Table 5:

Powtórzenie	Kiedy nauczyciel naśladuje wypowiedź jednego ucznia, aby zwrócić na nią uwagę. Często podczas powtórzenia nauczyciel akcentuje intonacją głosu niektóre kluczowe słowa zdania, które powtarza po uczniu. Zmiana sformułowania ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułowuje wypowiedź jednego ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i sprawienie by była bardziej zrozumiałą dla wszystkich.
Przeformułowanie	Przeformułowanie ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułowuje wypowiedź jednego ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i uczynienie jej bardziej zrozumiałej dla wszystkich. Przeformułowanie jest stosowane, gdy nauczyciel uważa, że informacja może być przydatna, ale należy ją lepiej przekazać, aby stała się źródłem wiedzy dla innych. […] Strategie powtórzenia i przeformułowania […] zmieniają jednego ucznia (autora wypowiedzi) w źródło wiedzy dla klasy.
Przeformułowanie z materiałem pomocniczym	Kiedy nauczyciel, oprócz przeformułowania, dodaje elementy, które wspomagają pracę uczniów.
Ponowne uruchomienie	Kiedy nauczyciel reaguje na wypowiedź ucznia, którą uważa za interesującą dla klasy, nie udziela bezpośredniej informacji zwrotnej, ale stawia powiązane pytanie. W ten sposób, poprzez ponowne uruchomienie, nauczyciel dostarcza ukrytej informacji zwrotnej […] na temat wypowiedzi ucznia, sugerując, że kwestia jest interesująca i warta pogłębienia lub, przeciwnie, ma pewne problematyczne punkty i należy ją przerobić.
Kontrastowanie	Kontrastowanie ma miejsce, gdy nauczyciel zwraca uwagę na dwie lub więcej wypowiedzi, przedstawiając dwie różne pozycje, aby ułatwić porównanie. Dzięki temu […] autorzy obu wypowiedzi mogą być dla klasy źródłem wiedzy, a także stają się odpowiedzialni za własną naukę.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Z doświadczenia FaSMEd czerpiemy pomysł tworzenia zajęć w klasie w perspektywie oceniania kształtującego, co może sprzyjać integracji.

3. Opis projektu

3.1 Trudności zidentyfikowane za pomocą kwestionariusza B2.
Wykrywamy trudności w następującej pozycji kwestionariusza B2 (Q4AI4):
Jeśli x = 2, uzupełnij następujące wyrażenia: x2 =…
2x =…
x2 =…
Trudności te związane są z konstrukcją znaczenia zmiennej, ekspresji zależnej od takiej zmiennej, a zwłaszcza z różnym działaniem, jakie odgrywa pozycja cyfr i liter w wyrażeniu, czyli z rolą liter i cyfr w wyrażenie.

3.2 Obszar poznawczy i dziedzina matematyki będąca przedmiotem zainteresowania

Obszar trudności zidentyfikowany za pomocą kwestionariusza B2 jest powiązany z dziedziną algebry. W szczególności trudności związane są z konstrukcją znaczenia zmiennej, ekspresji zależnej od takiej zmiennej, a w szczególności z różnym działaniem, jakie odgrywają cyfry i litery w wyrażeniu, czyli z rolą litery a liczby w wyrażeniu. Zatem Visuospatial jest zaangażowanym obszarem poznawczym (Tabela 1).

Tabela 1: Wykryte trudności są powiązane z domeną poznawczą wizualizacji przestrzennej i dziedziną algebry

	Arytmetyka	Geometria	Algebra
Pamięć			
Rozumowanie			
Wizualizacja przestrzenna			Jeśli x = 2, uzupełnij następujące wyrażenia: x^2 =… 2x =… x2 =…

3.3 Cele edukacyjne

Narzędzie interwencyjne ma na celu poprowadzenie uczniów do zrozumienia roli odgrywanej przez litery i cyfry w algebrze.

3.4 Adresowanie do Ucznia / klasy

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Narzędzie interwencji jest wyrażone w zestawie działań, które muszą być przeprowadzone z całą klasą w perspektywie integracji.

3.5 Działania edukacyjne: narzędzie interwencji

Sekwencje nauczania mają na celu rozwiązanie określonych trudności w uczeniu się w perspektywie włączającej. Uważa się, że ćwiczenia mają przede wszystkim wczuć się w uczniów i w ich trudności w podejściu do algebry. Według Villaniego (2014) przejście w kierunku algebry ma również fizjologiczny wkład dla uczniów. Większość nauczycieli i książek podaje, że: „W algebrze działamy literami tak samo, jak liczbami”, czy to prawda? Wychodząc od tych przemyśleń, możemy spróbować podzielić się z uczniami pojawiającymi się wątpliwościami związanymi z proponowanym ćwiczeniem, analizując semantyczny aspekt trzech podanych wyrażeń. Następnie, aby wyjaśnić w ramach wizualno-przestrzennych znaczenie, a tym samym podobieństwa i różnice w obliczeniach różnych współczynników i zmiennych, wykorzystywane są narzędzia ICT, w szczególności Geogebra, oprogramowanie Dynamic Geometry.

Przemyślenia na temat algebry.

Pierwszym krokiem jest podzielenie się z uczniami trudnościami związanymi z algebrą. Możemy rozpocząć dyskusję w klasie wokół stwierdzenia: „W algebrze działamy literami tak samo, jak liczbami”. Moglibyśmy przyjąć metodologię debaty: dzielimy klasę na dwie strony. Oczywiście, jeden będzie się za, a drugi przeciw określonej teorii. Najlepszym wyborem, aby metodologia działała, jest podzielenie klasy na cztery grupy i przypisanie po dwie grupy do każdej z dwóch teorii. Następnie przypisujemy jedną z każdej pary grup uczniowskich do twierdzącej. Ta grupa będzie argumentować w przedstawionych kwestiach. Pozostałe dwie grupy będą negatywne i będą spierać się przeciwko rezolucjom. Podczas debaty pozostałe grupy będą sędziami i zdecydują, która strona zaprezentowała mocniejszą sprawę głosując na zwycięzców debaty na jej zakończenie.

Nauczyciel działa tylko jako superwizor, śledząc harmonogram różnych faz debaty, udzielając studentom dodatkowych instrukcji na temat określonego słownictwa, które może być zaangażowane oraz przykładów, których można użyć do kontynuowania tezy. Na przykład możemy podać następujące wyrażenia:

: $\frac{a+b}{a} = \frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}} = b; \quad \frac{a}{ab} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b} = \frac{0}{b} = 0; \qquad (a+b)^2 = a^2 + b^2$

Następnie poproszenie uczniów o przedyskutowanie, dlaczego są to najczęstsze błędy popełniane przez uczniów na całym świecie!

Możemy również użyć tych samych wyrażeń, ale używając liczb, prosząc uczniów o wykonanie operacji w celu porównania arytmetyki i algebry.

Dzięki tej pierwszej wypowiedzi, również używając pisemnych notatek z debaty, możemy poeksperymentować z pięcioma strategiami sprzężenia zwrotnego FeSMEd przypomnianymi w Tabeli 5.

Możemy w szczególności narysować ujęcie śledzące różne terminy używane przez uczniów, podkreślając znaczenie i rolę liter i cyfr w wyrażeniu. Możemy również przedstawić na przykład różnicę między zmienną, a nieznaną, między literami oraz między współczynnikiem, a wykładnikiem. Ponadto możemy omówić różnicę między wynikiem w arytmetyce i algebrze. W szczególności możliwe jest, że wśród argumentów przeciwko stwierdzeniu, że w algebrze postępujemy tak, jak w arytmetyce, niektórzy studenci zauważyli, że w algebrze często otrzymujemy wynik będący dalszym wyrażeniem algebraicznym, podczas gdy wśród działań na liczbach otrzymujemy tylko liczbę i że jest to jeden z motywów kilku błędów w algebrze, takich jak te podane w przykładach powyżej.

Błędy te są bardzo częste wśród uczniów, ponieważ są oni psychologicznie zmuszeni do sięgnięcia po literę, podobnie jak w przypadku liczb. Jeśli te same wyrażenia są zapisane liczbami, uczniowie wykonaliby obliczenia poprawnie, ponieważ dzięki liczbom są w stanie semantycznie kontrolować procedurę, podczas gdy za pomocą liter ta kontrola jest zwalniana, wszystkie pewności co do czegoś znajomego i konkretnego są pomijane.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ten rodzaj pogłębiania, nawet za pomocą różnych wyrażeń w porównaniu z tym, które musimy rozwiązać, ma na celu skłonienie uczniów do zastanowienia się nad różnicami i podobieństwami, między algebrą a arytmetyką, dodając im otuchy do faktu, że w pewnym sensie normalne jest przebywanie na oszołomiony początek przechodzenia od liczenia między liczbami do obliczania literami.

Krok pierwszy: interpretacja matematyczna podanych wyrażeń
Jako pierwsze podejście do lepszego zrozumienia różnych znaczeń wyrażeń, proponujemy rozpoczęcie dyskusji w klasie na temat znaczenia operacji do wykonania.
Ta czynność zostanie wykonana wśród dodatnich liczb całkowitych.
Uczniowie zostaną poproszeni o napisanie definicji własnymi słowami, a następnie nauczyciel zbierze arkusze i po prostu moderuje dyskusję, zgodnie z 5 zasadami zebranymi w tabeli 5.
Miejmy nadzieję, że dojdziemy do wspólnej i poprawnej definicji mnożenia jako innego sposobu dodawania, bardziej zwartego sposobu pisania dodawania, tj.
Dla liczb całkowitych dodatnich mnożenie polega na dodaniu do siebie liczby (mnożnika) określonej liczby razy podana przez inną liczbę (mnożnik). Wynik nazywa się iloczynem.
Możemy zacząć od x2, gdy x = 3 zamiast 2, aby spojrzeć na x = 2 jako przypadek specjalny na końcu procedury. Musimy również sprecyzować, że x2 jest z kolei zwięzłym sposobem zapisu samego mnożenia tej liczby.

Czyli

$$2x = 2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$$

a

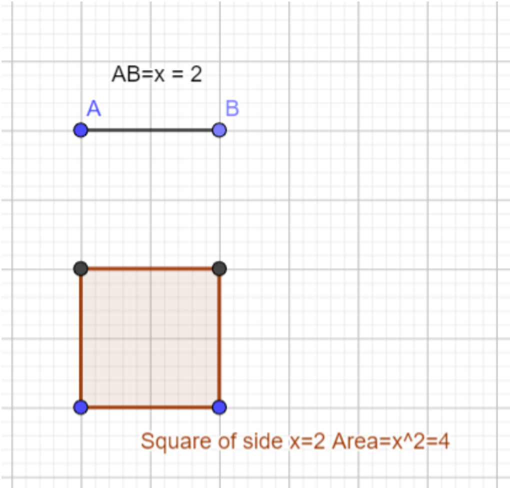
$$x^2 = 3^2 = 3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 = 9$$

Następnie prosimy uczniów o powtórzenie procedury z różnymi wartościami x, aby przekonać się o różnicy między tymi dwiema operacjami, nawet jeśli obie mogą być połączone z sumą, tj. Możemy zacząć przyglądać się różnej roli odgrywanej przez 2 zgodnie z jego położenie względem litery w wyrażeniu.
Dzięki tej strategii możemy dogłębnie zbadać prawdziwe znaczenie tych dwóch wyrażeń.
Przywołując wtedy zasadę przemienności dodawania, możemy pokazać, że x2 = 2x, a więc dają ten sam wynik, próbując ponownie z określonymi liczbami zamiast x.
Następnie możemy skupić się na fakcie, że w przypadku x = 2 równe wyniki (4) z różnych operacji są tylko przypadkiem i że zwykle te dwa wyrażenia oznaczają inną operację do wykonania i ogólnie rzecz biorąc, wyniki są wtedy inne.
Rama wizualno-przestrzenna: geometryczny punkt widzenia
Po tym wstępnym kroku przeprowadzonym w celu zapoznania się z problemem do rozwiązania, możemy przejść do zajęć klasowych, obejmujących podejście wzrokowo-przestrzenne i geometryczny punkt widzenia, w szczególności, aby przenieść poprzednie ćwiczenie do konkretnego obszaru zainteresowania.

Geometria narysuje odcinek o długości 2, który nazywamy x. Następnie możemy skonstruować kwadrat o boku x = 2, aby uzyskać geometryczną reprezentację wyrażenia x2 = 22 = 4 jako pole kwadratu (rys. 1).

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

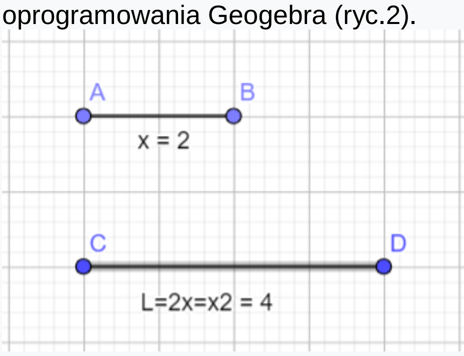
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Kwadrat o boku x=2 powierzchnia 22 =4

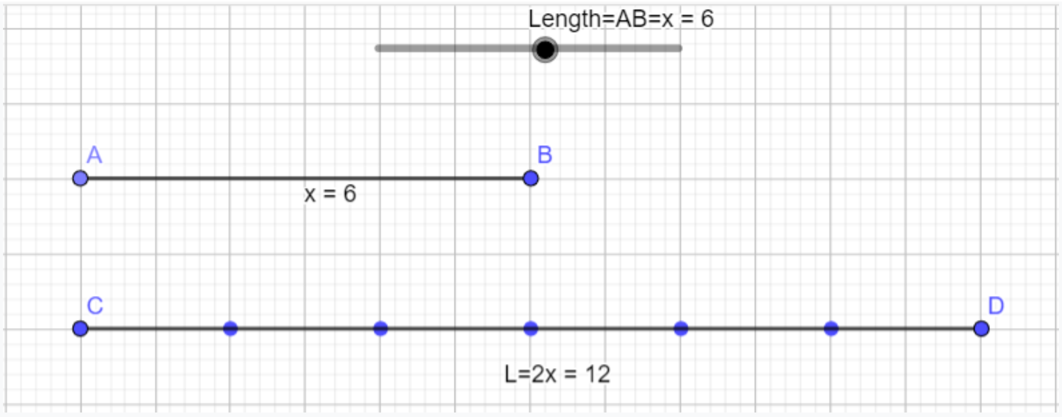
Rys.1 Konstrukcja kwadratu o boku 2 zaczynając od odcinka o długości x = 2 (Geometria)

Następnie możemy poprosić ucznia, aby przedstawił x2 i 2x w swoich notatnikach. W zależności od ich odpowiedzi dyskusja jest otwarta. Możemy to również zrobić za pomocą oprogramowania Geogebra (ryc.2).



Rys.2 Budowa odcinka o podwójnej długości odcinka AB (Geogebra)

Jeśli jest jasne dla uczniów, że x2 to to samo co 2x i różni się od x2, ponieważ prawidłowo narysują odcinek o podwójnej długości w porównaniu z x. Możemy poprosić ich o wyjaśnienie sobie nawzajem różnej roli numeru 2, jeśli zostanie umieszczony jako wykładnik lub jako czynnik. Nawet jeśli w przypadku x = 2 wynik matematyczny jest taki sam, za pomocą wizualnej reprezentacji elementów geometrycznych widać już na pierwszy rzut oka, że w pierwszym przypadku otrzymujemy obszar, podczas gdy w drugim jeszcze segment. Ta uwaga zostanie oczywiście podkreślona, zwłaszcza w przypadku błędnej odpowiedzi uczniów. Możemy również dokonać refleksji na temat jednostek miary i wymiarów danej wielkości, przypominając również podstawowe pojęcia fizyczne związane z pomiarami. Możemy wtedy skupić się na tym, co się stanie, jeśli zmienimy długość odcinka, np. ustawienie na 3 wartość x. Można to łatwo zrobić, ustawiając x jako zmienną w Geogebrze i w ten sposób możemy dalej omawiać pojęcie zmiennej, rolę liter w różnych używanych wyrażeniach i podkreślić moc algebry w porównaniu z arytmetyką. Osiąga się to poprzez przesuwanie wartości długości odcinka związanego z x i zmianę odpowiadającego w wyniku 2x, jak pokazano na rys. 2b (podczas animacji uczniowie mogą podążać za punktem śledzenia).



Rys. 2b Budowa odcinka o podwójnej długości odcinka AB przesuwającego się o wartość zmiennej x (Geogebra)

Przedstawienie relacji między zmienną a wyrażeniem zależnym od takiej zmiennej na planie kartezjańskim i na stole.

Następnie sami uczniowie zostaną poproszeni o podanie definicji w celu konceptualizacji znaczenia zmiennej i parametru.

Można to zrobić ponownie, stosując podejście wizualne, śledząc dwie funkcje y = 2x i = x2.

Na początku możemy poprosić ich o narysowanie punktami wykresu dwóch funkcji w ich własnym notatniku, a następnie możemy to zrobić za pomocą Geogebra.

Rozważamy tabelę określającą relację między zmienną „x” a wyrażeniem 2x

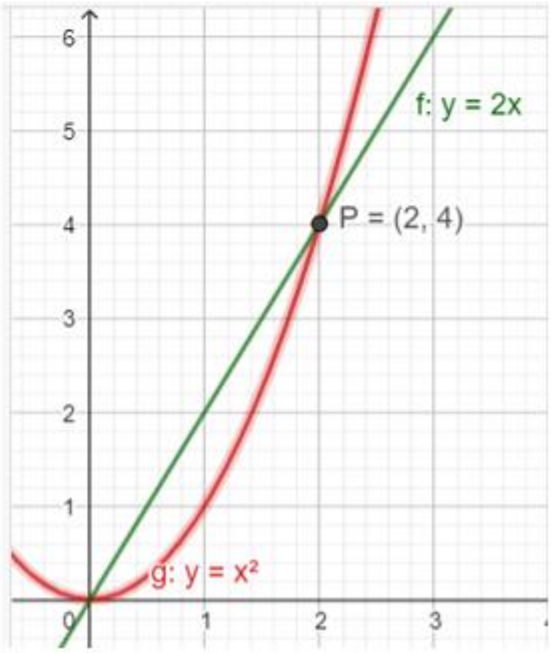
x	2x	x^2
0		
1		
2		
3		

Nauczyciel prosi uczniów o wyliczenie wartości wyrażenia 2x zaczynając od wartości zmiennej niezależnej „x”

x	2x	x^2
0	$2\cdot0=0$	$0\cdot0=0$
1	$2\cdot1=2$	$1\cdot1=1$
2	$2\cdot2=4$	$2\cdot2=4$
3	$2\cdot3=6$	$3\cdot3=9$

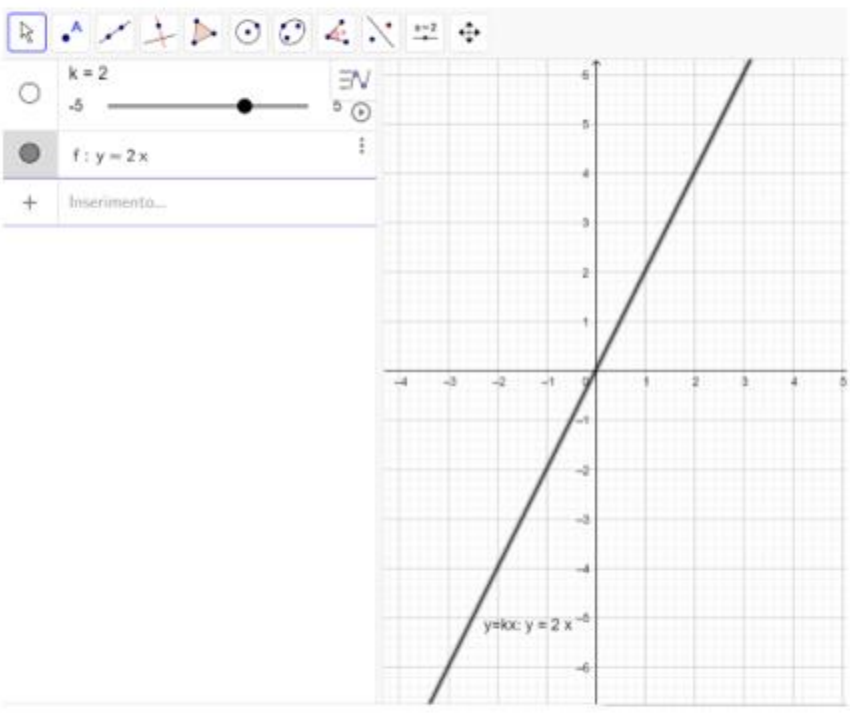
Nauczyciel prosi uczniów o narysowanie relacji na płaszczyźnie kartezjańskiej:

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union



Rys.3 Wykres y = 2x i y = x2 (Geogebra)

Nauczyciel prowadzi dyskusję na temat relacji między x a wyrażeniami 2x i x2 zarówno poprzez reprezentację geometryczną (na planie kartezjańskim), jak i relację algebraiczną (na stole), tak aby uczniowie mogli przejść od kodu do drugiego (proces transkodowania). Na tym etapie możemy również poprosić uczniów, aby skupili się na punkcie przecięcia i zaobserwowali, kiedy się pojawi.
Krokiem dalej mogłoby być śledzenie y = kx, zmieniając wartość k w Geogebra i otwierając dyskusję na temat roli, jaką odgrywa k w porównaniu z x.

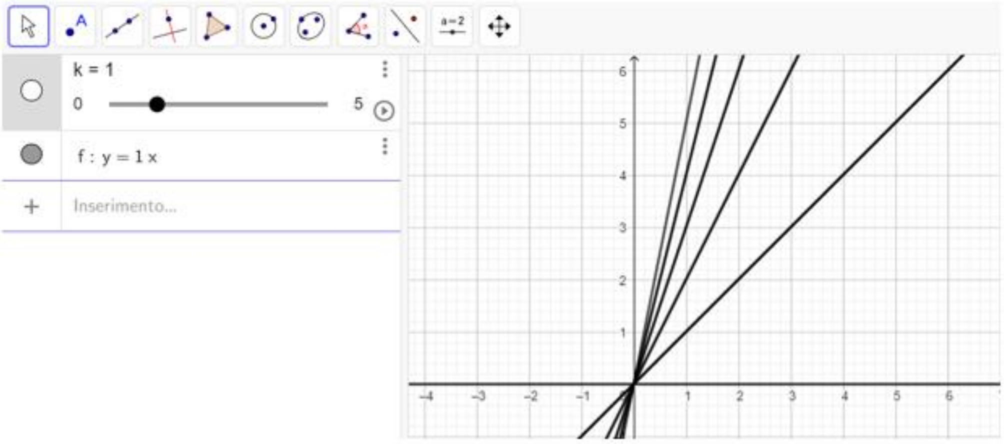


Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Rys.4 Wykres y = kx w Geogebra

Nauczyciel może zapytać: „Jak myślisz, co się stanie z wykresem zmieniającym k”?

Po dyskusji i kilku próbach przeprowadzonych przez uczniów na ich notatniku, przy użyciu tabel i wykreślając punkty ich wyników, nauczyciel pokaże, co się dzieje, zmieniając wartość k przesuwając kropkę po linii k w Geogebrze (ryc.5)



Rys. 5 Wykres y = kx w Geogebra uzyskał zmienne k i współczesne śledzenie wykresu

„Jak interpretujesz, co dzieje się z wyrażeniem algebraicznym 2x, 3x i tak dalej?”.

Możemy poprosić uczniów, aby wrócili do arkusza roboczego zawierającego segmenty, aby wskazać, jak k wpływa na wynik i jaki rodzaj matematycznej zależności istnieje między końcową długością uzyskaną po pomnożeniu x przez 2, 3 itd. Oraz samego x.
Ostateczna i bardziej dogłębna debata mogłaby być otwarta, mająca na celu nadanie znaczenia literom w wyrażeniach, pomimo faktu, że często używa się równych liter, proponując omówienie innego znaczenia x w dwóch następujących wyrażeniach: długość = 2x i 2x = 4, identyfikując w pierwszym x jako zmienną (np. Długość różnych segmentów do podwojenia), a w drugim x jako nieznaną wartość, chcielibyśmy określić, jaką długość należy powiązać z segmentem, aby jej podwójny byt 4 i tak dalej (lub jakakolwiek wielkość jest związana z x).
Zauważmy, że opisane podejścia proponują różne reprezentacje (zasada UDL 1).
Uważa się, że odgrywają one rolę mediatora algebraicznych koncepcji zmiennej, zależnej ekspresji i roli w nich liczb (liczby jako czynniki lub wykładniki) poprzez model dynamiczny począwszy od matematycznego, poprzez geometryczny, aż po graficzny punkt widzenia. (Zasada UDL 2). Mediacja może nastąpić dzięki kanałowi wizualnemu i wykorzystaniu wizualnych środków werbalnych (języka pisanego) tuż za wizualizacją sensu tego środka. Konstrukcja koncepcji zrealizowana w ten sposób może pozwolić uczniom, a zwłaszcza studentom z MLD, na znalezienie odniesień do doświadczeń, które pasują do ich stylu poznawczego, zapewniając wiele środków zaangażowania (Zasada UDL 3).
Doprowadzi to ich do przypomnienia sobie tego podejścia za każdym razem, gdy napotkają algebraiczną ekspresję obejmującą podobne sytuacje, dzięki czemu będą bardziej pewni sukcesu.

Jeśli chodzi o ocenę formatywną, nasz projekt aktywuje strategię 2 (dyskusje w klasie inżynierów). Podczas dyskusji są zamiast tego eksperymentowane strategie 5 i 4, ponieważ uczniowie mogą wyrazić swoje wątpliwości, stając się właścicielami własnej nauki lub udzielić wyjaśnień swoim partnerom, którzy stają się zasobami dla partnerów. Nauczyciel i rówieśnicy mogą przekazać uczniowi informację zwrotną, aktywując w ten sposób strategię 3.

4. Odniesienie zasad UDL do zaproponowanych ćwiczeń

Zauważamy, że ten sam cel edukacyjny konstruowanie zrozumienia różnych ról odgrywanych przez litery i cyfry w algebrze jest traktowany na różne sposoby, działając zgodnie z trzema zasadami UDL (Tabela 7, nasze komentarze na czerwono ilustrują związek między zasadami i nasze działania).

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESII
	"dlaczego" się uczę	"czego" się uczę	"jak" się uczę
Dostęp	**Wzbudzanie zainteresowania**: • Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię • Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność • Ograniczaj zagrożenia i elementy rozpraszające	**Postrzeganie:** • Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji • Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio • Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych Różne sposoby prezentowania informacji	**Działania fizyczne**: • Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu • Zapewniaj optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających
Tworzenie	**Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości**: • Zwiększ znaczenie celów i zadań • Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie • Wspieraj współpracę i poczucie przynależności • Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału	**Język i symbole**: • Wyjaśniaj słownictwo i symbole • Wyjaśniaj składnię i budowę zdań • Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli Zastosowanie oprogramowania Dynamic Geometry • Propaguj zrozumienie w różnych językach działania polegające na transkodowaniu między różnymi rejestrami reprezentacji • Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu Sprzyja temu wizualizacja różnych rejestrów (na przykład interpretacja geometryczna i wizualizacja, relacje między operacjami matematycznymi i różna rola odgrywana przez te same liczby i litery; zmienna jako punkt ruchomy oznaczony x, czyli długość)	**Ekspresja i komunikacja**: • Używaj różnorodnych metod komunikacji • Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia • Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności W zajęciach przewidziane są ćwiczenia manualne. Na przykład przeciągnięcie ruchomego punktu może pomóc w wizualizacji, że parametr może mieć różne wartości wpływające na wykres na wykresie lub zmienna może mieć różne wartości wpływające na odpowiadający wynik wyrażenia.
Stosowanie	**Samoregulacja:** • Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację • Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami • Rozwijaj samoocenę i refleksję Strategie oceniania kształtującego, o których mowa w części 2, mogą pomóc w samoocenie i refleksji. Mówiąc dokładniej, nauczyciel może udzielać różnego rodzaju informacji zwrotnych	**Rozumienie**: • Uaktywniaj lub zapewniaj posiadaną wiedzę podstawową • Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeganie związków • Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją • Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację	**Funkcja wykonawcza**: • Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów • Wspieraj planowanie i rozwój strategii • Ułatwiaj zarządzanie informacjami i zasobami • Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów Wskazywanie właściwego wyznaczania celów Wykorzystanie przedmiotów może być również wsparciem dla pamięci. Kierują one procesem dociekań uczniów, dostarczając informacji zwrotnych. (na przykład poprzez geometryczną wizualizację wyrażeń algebraicznych) Wspieranie planowania i opracowywania strategii Ułatwianie zarządzanie informacjami i zasobami
	Wykreowanie ucznió, którzy….		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są zaradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

5. Bibliografia

[1] Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31.

[2] Cusi, A., Morselli, F.,& Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. ZDM Mathematics Education.

[3] Cusi, A., Morselli, F.,& Sabena, C. (2018). Enhancing formative assessment in mathematical class discussion: a matter of feedback. Proceedings of CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01949286, pp. 3460-3467.

[4] Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115–141.

[5] Robotti E., Baccaglini-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In *Innovation & Technology*. Series Mathematics Education in the Digital Era, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.

[6] Villani V., Berni M. (2014). Cominciamo da zero, Pitagora Editrice Bologna.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union