



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

Apoio à memorização de teoremas

Universidade de Genova ¹

1. Introdução

De forma a desenvolver atividades educativas voltadas para o apoio à memória na geometria, referimo-nos a alguns referenciais teóricos que serão descritos na secção 2.

Na secção 3, é feita a descrição das atividades educativas. Em particular, se as atividades são dirigidas a um único aluno ou à turma, o objetivo pedagógico das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvidos e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2.

2. Quadro teórico de referência

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as atividades são:

1) **Princípios do Universal Design for Learning (UDL)** (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de ENVOLVIMENTO	Fornecer vários meios de REPRESENTAÇÃO	Fornecer vários meios de AÇÃO e EXPRESSÃO
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o Interesse no envolvimento : <ul style="list-style-type: none">• Otimizar a escolha individual e a autonomia• Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade• Minimizar ameaças e distrações	Fornecer opções para Percepção : <ul style="list-style-type: none">• Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações• Oferecer alternativas para informações auditivas• Oferecer alternativas para informações visuais	Fornecer opções para Ações Físicas : <ul style="list-style-type: none">• Variar o método de resposta e navegação• Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio

¹ Emanuela De Negri, Elisabetta Robotti, Francesca Morselli, Paola Viterbori, Anna Siri, Laura Capelli





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Construção	<p>Fornece opções para Esforço e Persistência:</p> <ul style="list-style-type: none"> Aumentar a relevância das metas e objetivos Variar exigências e recursos para otimizar o desafio Promover a colaboração e o espírito de equipa Aumentar o feedback orientado para o professor 	<p>Fornece opções para Idiomas e Símbolos:</p> <ul style="list-style-type: none"> Esclarecer vocabulário e símbolos Esclarecer a sintaxe e a estrutura Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos Promover a compreensão entre as diferentes linguagens Ilustrar através de múltiplas representações 	<p>Fornece opções para Expressão e Comunicação:</p> <ul style="list-style-type: none"> Usar vários meios para comunicação Usar várias ferramentas para construção e estruturação Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho
	<p>Fornece opções para Autoregulação:</p> <ul style="list-style-type: none"> Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações Desenvolver a autoavaliação e a reflexão 	<p>Fornece opções para Compreensão:</p> <ul style="list-style-type: none"> Ativar ou fornecer conhecimento prévio Realçar padrões, características, grandes ideias e relações Guiar o processamento e a visualização de informações Maximizar a transmissão e generalização 	<p>Fornece opções para Funções Executivas:</p> <ul style="list-style-type: none"> Orientar o estabelecimento de metas adequadas Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias Facilitar a gestão de informações e de recursos Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso
Meta	Alunos que são		
	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados

O “Center for Applied Special Technology (CAST)” desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Universal Design for Learning (UDL), com o objetivo de focar a pesquisa, o desenvolvimento e a prática educacional na compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). A UDL inclui um conjunto de princípios, articulados em Diretrizes e Pontos de verificação². A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à instrução. [...]”

Assim, a UDL foca-se nessas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e concepção de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de envolvimento. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos na receção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. Por sua vez, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações/ ideias e a sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para as nossas análises, vamo-nos concentrar em particular nas diretrizes específicas dos três Princípios.³

Para caracterizar as dificuldades dos alunos em geometria, referimo-nos aos seguintes elementos do referencial de Karagiannakis e colegas (Tabela 1), que trataram da Memória na recuperação de fatos geométricos e processamento geométrico.

Tabela 1: Quadro de Karagiannakis e colegas: domínios do modelo de quatro vertentes e conjuntos

³ Os itens são retirados da lista interativa em <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

de competências matemáticas associadas a cada domínio

Domínio	Competências matemáticas associadas ao domínio
Números e Cálculo	Estimar com precisão um pequeno número de objetos (até 4), estimar quantidades aproximadas; localizar números na reta numérica; trabalhar com símbolos arábicos; converter um número de uma representação para outra (analógico-arábico-verbal), usar princípios de contagem.
Memória (recuperação e processamento)	Relembrar factos numéricos; descodificar terminologia (numerador, denominador, isósceles, equilátero); recordar teoremas e fórmulas; realizar cálculos mentais com fluência; recordar procedimentos e acompanhar as etapas necessárias à resolução de problemas.
Raciocínio	Compreender conceitos matemáticos, ideias e relações; compreender etapas múltiplas em procedimentos / algoritmos complexos; compreender os princípios lógicos básicos (condicionalidade - "se ... então" - comutatividade, inversão); compreender a estrutura semântica dos problemas; tomar decisões (estratégicas); fazer generalizações.
Visuo-Espacial	Interpretar e usar a organização espacial de representações de objetos matemáticos (por exemplo, números em notação decimal, expoentes, figuras 2D e 3D geométricas e rotações); representar números na reta numérica; distinguir números arábicos e símbolos matemáticos; realizar cálculos respeitando a prioridade das operações; interpretar gráficos e tabelas.

Uma vez que esta ferramenta de intervenção diz respeito à atividade geométrica, consideramos a teoria de Duval sobre diferentes apreensões cognitivas de figuras, como a forma de ver, construir e descrever uma figura geométrica e suas propriedades.

O modelo de Duval é de particular interesse, pois preocupa-se com a compreensão do desenvolvimento dos processos cognitivos revelados na solução de problemas de geometria (Duval, 1998). Duval (1995) sugere uma teoria analítica para analisar os processos de pensamento envolvidos numa atividade geométrica.

Na verdade, no modelo cognitivo de raciocínio geométrico de Duval, a figura desempenha um papel fundamental:

- Uma figura dá-nos uma representação de uma situação geométrica que é mais curta e mais fácil de ser compreendida do que uma representação com a fala lingüística.
- Existem diferentes apreensões cognitivas de figuras através das quais ver, construir e descrever uma figura geométrica e suas propriedades:
 1. Apreensão perceptual
 2. Apreensão sequencial
 3. Apreensão discursiva
 4. Apreensão operatória

1. Apreensão perceptual: trata-se do reconhecimento físico (forma, representação, tamanho, brilho, etc.) de uma figura em análise. Devemos também distinguir e reconhecer subfiguras dentro das figuras, uma vez que uma distinção ou reconhecimento relevante dessas unidades de subfiguração pode ajudar e fornecer dicas para a solução de problemas em situações geométricas.

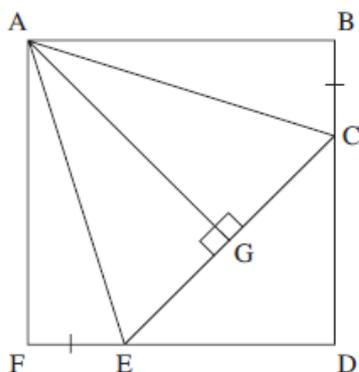


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

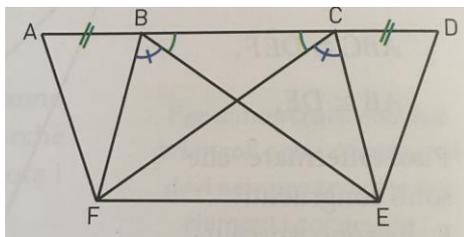
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Ou a seguinte figura:



Por exemplo, as subfiguras FBE e FCE que também estão sobrepostas.

2. Apreensão sequencial: trata-se da construção de uma figura ou da descrição da sua construção. Tal construção depende de restrições técnicas e também de propriedades matemáticas, uma vez que a construção de uma figura pode fundir diferentes unidades figurais. Acredita-se que a construção pode ajudar no reconhecimento de relações entre propriedades matemáticas e restrições técnicas.

3. Apreensão discursiva: trata-se de (a) a habilidade de conectar configuração (ões) com princípios geométricos, (b) a habilidade de fornecer boa descrição, explicação, argumentação, dedução, uso de símbolos, raciocínio dependendo de afirmações feitas na percepção apreensão, e (c) a capacidade de descrever figuras através de linguagem geométrica / textos narrativos

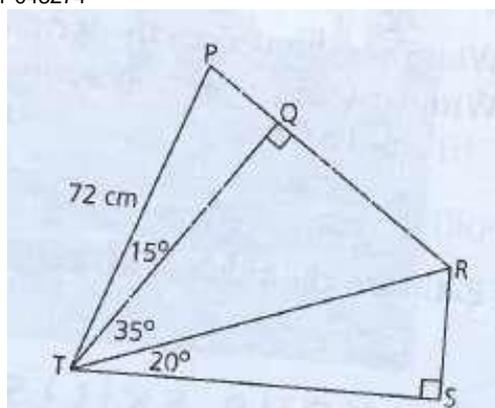
4. Apreensão operativa: trata-se de fazer modificações numa determinada figura de várias maneiras para investigar outras configurações:

- A forma mereológica: dividir toda a figura dada em partes de várias formas e combinar essas partes em outra figura ou subfiguras;
- A forma ótica: variando o tamanho das figuras; pode tornar uma forma maior, mais estreita ou inclinada, as formas podem ter uma aparência diferente;
- A forma do lugar: variando a posição ou a sua orientação.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



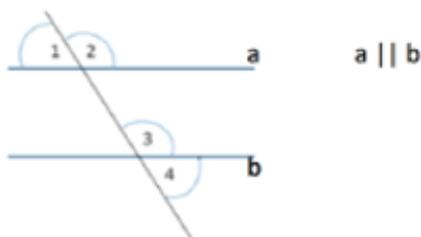
3. Descrição

3.1 Dificuldades identificadas através do questionário B2

Detetámos dificuldades no seguinte item de B2:

2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a ...

3.



Qual das afirmações é verdadeira?

- A. Os ângulos 1 e 4 são iguais
- B. Os ângulos 2 e 3 têm a soma de 180°
- C. Os ângulos 1 e 2 têm a soma de 180°
- D. O ângulo 3 é maior do que o ângulo 2

As dificuldades estão relacionadas a:

- Recuperação da memória de teoremas
- Visualização e interpretação de informações sobre o desenho (visualizar ângulos e interpretar seu código numérico)

3.2 Área cognitiva e domínio matemático envolvidos

A área de dificuldades identificada pelo questionário B2 está relacionada com o domínio da Geometria.

A Memória é a área cognitiva envolvida.

Na Tabela 1 estão identificadas as dificuldades em relação à área cognitiva e domínio matemático.

Tabela 1: As dificuldades detetadas estão ligadas à área cognitiva da Memória e ao domínio da Geometria

Aritmética Geometria Álgebra



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Memória		X	
Raciocínio			
Visuo-espacial			

3.3 Objetivos Educativos

A ferramenta de intervenção visa construir estratégias para recuperar os factos geométricos e guardá-los na memória para os utilizar em raciocínios.

3.4 Destinatários

A ferramenta de intervenção articula-se num conjunto de atividades que pode ser realizada com o aluno ou com toda a turma.

3.5 Atividades educativas: a ferramenta de intervenção

O ponto de partida relativo à conceção de atividades educativas consiste na seguinte afirmação: a forma como um texto de uma tarefa é apresentado (por exemplo, um texto que exige a demonstração de um teorema geométrico), condiciona a memória de trabalho e a capacidade de recuperação da memória de informação (princípios UDL).

Numa tarefa de demonstração geométrica, a memória está envolvida para:

- recuperar teoremas e informações
- ter em mente as hipóteses (apresentadas no texto da tarefa)
- estruturar um plano para demonstrar

A atividade educativa desta ferramenta de intervenção é concebida para apoiar a metacognição. Promove o desenvolvimento de estratégias que permitem aos alunos apoiar a memória nas diferentes funções acima mencionadas. Em particular, esta atividade concentra-se em recuperar o teorema (com o fim de inferir a informação a ser usada).

Para memorizar e recuperar teoremas e informações:

Para memorizar e recuperar teoremas e informações, parece útil construir o seu significado usando representações dinâmicas, por exemplo, através de funcionalidades do GeoGebra. Na verdade, uma construção do GeoGebra suporta habilidades para reconhecer semelhanças nas figuras propostas (figura geométrica) com a figura associada ao teorema.

TAREFA 1

Com o objetivo de visualizar o teorema, mostrando as relações entre ângulos formados por um par de retas paralelas e uma secante, esta tarefa explora representações do GeoGebra.

Na Figura 2 encontra-se uma representação do ecrã do site GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>) onde a função de arrastar e a dinâmica do drawing do GeoGebra são exploradas para visualizar e agir sobre a figura geométrica.

O objetivo da tarefa é usar a função de arrastar para exibir diferentes configurações associadas ao teorema. Isso permite dar forma à ideia de generalização da figura geométrica associada ao teorema e permite criar uma espécie de banco de dados de imagens possíveis a serem recuperadas para identificar no desenho fornecido, a configuração do teorema de retas paralelas cortadas por uma secante (útil para fins de prova).

Passo 1



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Este software mostra as relações entre o par de ângulos formados por um par de retas paralelas e uma retas secante. A percepção dessa regularidade é apoiada tanto arrastando as retas quanto mudando ângulos. No primeiro caso, as retas mudam de inclinação, mas mantêm o paralelismo entre elas. No segundo caso, os ângulos mudam a sua amplitude, mas mantêm a congruência entre eles.

≡ GeoGebra

Parallel Lines & Transversals

Properties of Parallel Lines

Angles Formed by Parallel Lines an...

Move the points on the parallel lines and/or the transversal & select different angle relationships using the checkboxes. As you shift the lines, notice the angle measures.

$124^\circ = 124^\circ$

Alternate Interior Same Side Interior Corresponding

Alternate Exterior Same Side Exterior

1 2 1 2 1 2

3 4

1 2 1 2

Figura 2: verificação (dinâmica) das relações entre um par de ângulos formados por um par de retas paralelas e uma reta secante

Na Figura 3 está representada uma fotografia do ecrã capturado do site GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3Bu>) onde são exploradas a função de arrastar e a dinâmica da figura geométrica.

Passo 2

As retas AB e FC são paralelas. A reta BC é uma secante às duas retas paralelas AB e FC. Use os pontos A, B e C para alterar os valores dos ângulos. Quando uma secante intersesta duas retas paralelas, que relações há entre os ângulos? Faça o máximo de observações que puder.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

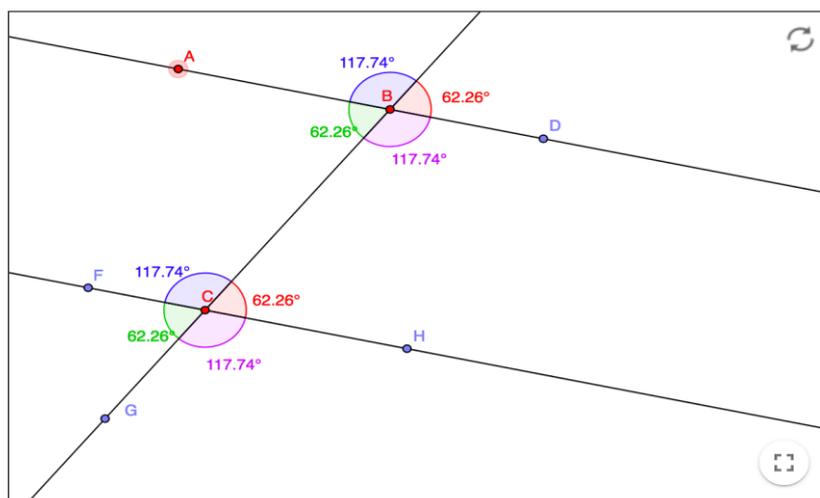


Figura 3: verificação (dinâmica) das relações entre ângulos formados por um par de retas paralelas e uma reta secante

Observe que as cores permitem que os alunos concentrem a sua atenção em alguns ângulos, ignorando o código numérico.

Discussão através das diretrizes UDL sobre as atividades mencionadas acima

A vermelho aparecem os nossos comentários para ilustrar a conexão entre os princípios da UDL e as nossas atividades.

Tabela 3: Análise das atividades através da Tabela de princípios UDL.

Compromisso	Representação	Ação & Expressão
<p>Recrutamento de interesse</p> <p>Otimiza a escolha individual e a autonomia</p> <p>Otimiza a relevância, o valor e a autenticidade</p> <p>Minimiza ameaças e distrações</p>	<p>Percepção</p> <p>Fornecer maneiras de personalizar a exibição de informações</p> <p>Oferece alternativas para ouvir informações</p> <p>Oferece alternativas para informações visuais</p> <p>Diferentes registos através dos quais as informações são exibidas (visual não verbal; verbal simbólico)</p>	<p>Ação física</p> <p>Vários métodos de resposta e navegação</p> <p>Otimize o acesso a ferramentas e tecnologias</p> <p>Geogebra permite aos alunos ação física sobre os objetos figurativos e dá-lhes feedbacks apropriados sobre sua ação</p>



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Sustentação do esforço, Persistência	Linguagem & Símbolos	Expressão comunicação
Aumenta a relevância das metas e objetivos	Esclarece o vocabulário e os símbolos Esclareça a sintaxe e a estrutura Oferecer linguagem e símbolos alternativos para descodificar informações e trabalhar com as informações	Usa vários meios de comunicação
Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio	<i>Isso é promovido pelo uso de diferentes registos de representação: figurativo não verbal no desenho, cores</i> Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos	Usa várias ferramentas para construção e composição
Promova a colaboração e a comunidade	Promove a compreensão em vários idiomas Ilustrar através de múltiplas medias	Desenvolve fluências com níveis de suporte qualificados para prática e desempenho
Aumenta o feedback orientado para o domínio	<i>Isso é promovido pelo uso de software de geometria dinâmica como o GeoGebra.</i>	Usa diferentes registos para se comunicar
Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio	Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos <i>Isto é promovido pela visualização de hipóteses a partir de desenhos realizados pelo GeoGebra</i>	
Promove a colaboração e a comunidade		
<i>Os feedbacks do software apoiam o compromisso e a motivação no que diz respeito à elaboração da solução da tarefa</i>		



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Auto Regulação	Compreensão	Funções Executivas
<p>Promove expectativas e crenças que otimizam a motivação</p> <p>Facilita as habilidades e estratégias pessoais de reflexão</p> <p>Desenvolve autoavaliação e reflexão</p>	<p>Ativa ou fornecer conhecimento prévio</p> <p>Destaque padrões, recursos críticos, grandes ideias e relacionamentos (ponto de verificação 3.2)</p> <p>Guia de processamento e visualização de informações</p> <p>Maximize a transferência e generalização</p> <p><i>Para apoiar a generalização, as tarefas sugerem visualizar desenhos no GeoGebra. Na verdade, a função de arrastar do GeoGebra permite que os alunos identifiquem invariantes da figura e recuperem o teorema adequado para desenvolver a prova necessária.</i></p> <p>Percepção, linguagem e símbolos, compreensão (Construir conhecimento utilizável, conhecimento que é acessível para futuras tomadas de decisão, depende não meramente de perceber informações, mas de "habilidades de processamento de informações" ativas)</p>	<p><i>Orientar o estabelecimento de metas adequadas</i></p> <p><i>O uso da função arrastar para visualizar elementos invariantes na figura permite ao aluno construir uma espécie de banco de dados de imagens. Eles suportam memória para identificar, no desenho fornecido, a configuração do teorema que deve ser utilizado.</i></p> <p><i>Apoio ao planeamento e desenvolvimento de estratégia</i></p> <p><i>Facilita a gestão de informações e recursos</i></p> <p><i>Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso</i></p>

4. Referências

- [1] Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- [2] Duval, R.: 1995, 'Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing', in R. Sutherland and J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- [3] Duval, R.: 1998, 'Geometry from a cognitive point a view', in C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.
- [4] UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>
- [5] GeoGebra materials: <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>
- [6] <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3BuA>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.