



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

Apoio à memória no processo de demonstração geométrica

Universidade de Genova¹

1. Introdução

Para desenvolver atividades educativas voltadas para o apoio à memória na geometria, referimo-nos a alguns referenciais teóricos que serão descritos na secção 2.

Na secção 3, o design das atividades educativas é descrito. Em particular, se as atividades são dirigidas aos alunos ou à turma, o objetivo pedagógico das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvidos e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2

2. Quadro teórico de referência

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as atividades são:

1) Princípios do Universal Design for Learning (UDL) (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de ENVOLVIMENTO	Fornecer vários meios de REPRESENTAÇÃO	Fornecer vários meios de AÇÃO e EXPRESSÃO
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o Interesse no envolvimento : <ul style="list-style-type: none">• Otimizar a escolha individual e a autonomia• Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade• Minimizar ameaças e distrações	Fornecer opções para Percepção : <ul style="list-style-type: none">• Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações• Oferecer alternativas para informações auditivas• Oferecer alternativas para informações visuais	Fornecer opções para Ações Físicas : <ul style="list-style-type: none">• Variar o método de resposta e navegação• Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio

¹ Emanuela De Negri, Elisabetta Robotti, Francesca Morselli, Paola Viterbori, Anna Siri, Laura Capelli





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Construção	<p>Fornecer opções para Esforço e Persistência:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aumentar a relevância das metas e objetivos • Variar exigências e recursos para otimizar o desafio • Promover a colaboração e o espírito de equipa • Aumentar o feedback orientado para o professor 	<p>Fornecer opções para Idiomas e Símbolos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Esclarecer vocabulário e símbolos • Esclarecer a sintaxe e a estrutura • Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos • Promover a compreensão entre as diferentes linguagens • Ilustrar através de múltiplas representações 	<p>Fornecer opções para Expressão e Comunicação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Usar vários meios para comunicação • Usar várias ferramentas para construção e estruturação • Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho
	<p>Fornecer opções para Autorregulação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação • Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações • Desenvolver a autoavaliação e a reflexão 	<p>Fornecer opções para Compreensão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ativar ou fornecer conhecimento prévio • Realçar padrões, características, grandes ideias e relações • Guiar o processamento e a visualização de informações • Maximizar a transmissão e generalização 	<p>Fornecer opções para Funções Executivas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Orientar o estabelecimento de metas adequadas • Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias • Facilitar a gestão de informações e de recursos • Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso
Meta	Alunos que são		
	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados

O “Center for Applied Special Technology (CAST)” desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Universal Design for Learning (UDL), com o objetivo de focar a pesquisa, o desenvolvimento e a prática educacional na compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). A UDL inclui um conjunto de princípios, articulados em Diretrizes e Pontos de verificação². A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à instrução. [...]”

Assim, a UDL foca-se nessas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e concepção de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de envolvimento. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos na receção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. Por sua vez, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações/ ideias e a sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para as nossas análises, vamos-nos concentrar em particular nas diretrizes específicas dos três Princípios.³

¹ Para uma lista completa dos princípios, diretrizes e pontos de verificação e uma descrição mais extensa das atividades do CAST, visite <http://www.udlcenter.org>





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Para caracterizar as dificuldades dos alunos em geometria, referimo-nos aos seguintes elementos do referencial de Karagiannakis e colegas (Tabela 1), que trataram da Memória na recuperação de fatos geométricos e processamento geométrico.

Tabela 1: Quadro de Karagiannakis e colegas: domínios do modelo de quatro vertentes e conjuntos de competências matemáticas associadas a cada domínio

Domínio	Competências matemáticas associadas ao domínio
Números e Cálculo	Estimar com precisão um pequeno número de objetos (até 4), estimar quantidades aproximadas; localizar números na reta numérica; trabalhar com símbolos arábicos; converter um número de uma representação para outra (analógico-arábico-verbal), usar princípios de contagem.
Memória (recuperação e processamento)	Relembrar factos numéricos; descodificar terminologia (numerador, denominador, isósceles, equilátero); recordar teoremas e fórmulas; realizar cálculos mentais com fluência; recordar procedimentos e acompanhar as etapas necessárias à resolução de problemas.
Raciocínio	Compreender conceitos matemáticos, ideias e relações; compreender etapas múltiplas em procedimentos / algoritmos complexos; compreender os princípios lógicos básicos (condicionalidade - "se ... então" - comutatividade, inversão); compreender a estrutura semântica dos problemas; tomar decisões (estratégicas); fazer generalizações.
Visuo-Espacial	Interpretar e usar a organização espacial de representações de objetos matemáticos (por exemplo, números em notação decimal, expoentes, figuras 2D e 3D geométricas e rotações); representar números na reta numérica; distinguir números arábicos e símbolos matemáticos; realizar cálculos respeitando a prioridade das operações; interpretar gráficos e tabelas.

Uma vez que esta ferramenta de intervenção diz respeito à atividade geométrica, consideramos a teoria de Duval sobre diferentes apreensões cognitivas de figuras, como a forma de ver, construir e descrever uma figura geométrica e suas propriedades.

O modelo de Duval é de particular interesse, pois preocupa-se com a compreensão do desenvolvimento dos processos cognitivos revelados na solução de problemas de geometria (Duval, 1998). Duval (1995) sugere uma teoria analítica para analisar os processos de pensamento envolvidos em uma atividade geométrica.

Na verdade, no modelo cognitivo de raciocínio geométrico de Duval, a figura desempenha um papel fundamental:

- Uma figura nos dá uma representação figural de uma situação geométrica que é mais curta e mais fácil de ser compreendida do que uma representação com a fala linguística.
- Existem diferentes apreensões cognitivas de figuras através das quais ver, construir e descrever uma figura geométrica e suas propriedades:

1. Apreensão perceptual
2. Apreensão sequencial
3. Apreensão discursiva
4. Apreensão operatória

1. Apreensão perceptual: trata-se do reconhecimento físico (forma, representação, tamanho, brilho, etc.) de uma figura. Devemos também discriminar e reconhecer subfiguras dentro das figuras, uma vez que uma discriminação ou reconhecimento relevante dessas unidades de subfiguração pode ajudar e fornecer dicas para a solução de problemas em situações

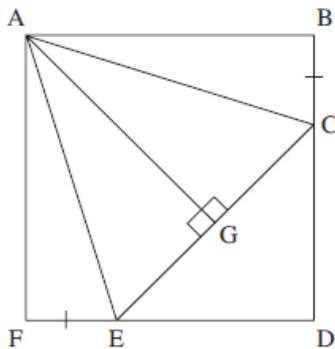


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

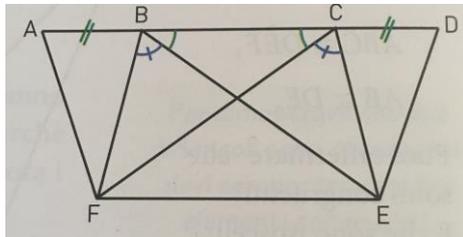
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274
geométricas.



Ou a seguinte figura:



Por exemplo, as subfiguras FBE e FCE que também estão sobrepostas.

2. Apeensão sequencial: trata-se da construção de uma figura ou da descrição da sua construção. Tal construção depende de restrições técnicas e também de propriedades matemáticas, uma vez que a construção de uma figura pode fundir diferentes unidades figurais. Acredita-se que a construção pode ajudar no reconhecimento de relações entre propriedades matemáticas e restrições técnicas.

3. Apeensão discursiva: trata-se de (a) a habilidade de conectar configuração (ões) com princípios geométricos, (b) a habilidade de fornecer boa descrição, explicação, argumentação, dedução, uso de símbolos, raciocínio dependendo de afirmações feitas na percepção apreensão, e (c) a capacidade de descrever figuras através de linguagem geométrica / textos narrativos

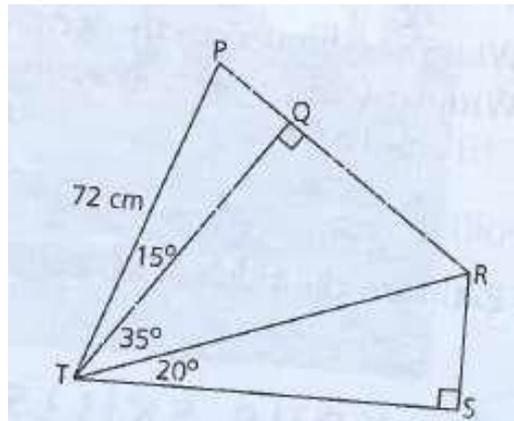
4. Apeensão operativa: trata-se de fazer modificações em uma determinada figura de várias maneiras para investigar outras configurações:

- A forma mereológica: dividir toda a figura dada em partes de várias formas e combinar essas partes em outra figura ou subfiguras;
- A forma ótica: variando o tamanho das figuras; pode tornar uma forma maior, mais estreita ou inclinada, as formas podem ter uma aparência diferente;
- A forma do lugar: variando a posição ou a sua orientação.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

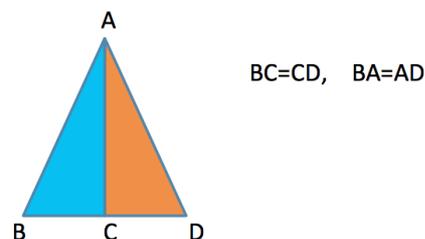


3. Descrição

3.1 Dificuldades identificadas através do questionário B2

Detetámos dificuldades no seguintes itens de B2:

1)



Que tipo de triângulo é CDA?
Que tipo de triângulo é BDA?

As dificuldades estão relacionadas com:

- mudar constantemente o foco visual do texto escrito para o desenho e vice-versa, de modo a manter em mente as informações obtidas a partir do texto
- Visualizar no desenho as informações geométricas detetadas na hipótese
- Processar essas informações (usá-las como prova)

3.2 Área cognitiva e domínio matemático envolvidos

A área de dificuldades identificada pelo questionário B2 está relacionada com o domínio da Geometria.

A memória é a área cognitiva envolvida.

Na Tabela 1 está a identificação das dificuldades em relação à área cognitiva e domínio matemático.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Tabela 1: As dificuldades detetadas estão ligadas à área cognitiva da Memória e ao domínio da Geometria

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória		X	
Raciocínio			
Visuo-espacial			

3.3 Objetivos Educativos

A ferramenta de intervenção visa construir estratégias para recuperar os factos geométricos e guardá-los na memória para os utilizar em raciocínios.

3.4 Destinatários

A ferramenta de intervenção articula-se num conjunto de atividades que podem ser realizadas com um aluno ou com toda a turma.

3.5 Atividades educativas: a ferramenta de intervenção

O ponto de partida relativo à concepção de atividades educacionais consiste na seguinte afirmação: a forma como um texto de uma tarefa é apresentado (por exemplo, um texto que exige a demonstração de um teorema geométrico), condiciona a memória de trabalho e a capacidade de recuperação da memória de informação (princípios UDL).

Numa tarefa de prova geométrica, a memória está envolvida para:

- recuperar teoremas e informações
- ter em mente as hipóteses (apresentadas no texto da tarefa)
- estruturar um plano para demonstrar

A atividade educativa desta ferramenta de intervenção é concebida para apoiar a metacognição. Promove o desenvolvimento de estratégias que permitem aos alunos apoiar a memória nas diferentes funções acima mencionadas. Em particular, esta atividade concentra-se em recuperar o teorema (com o fim de inferir a informação a ser usada), para ter em conta as informações obtidas do texto (hipóteses) e processar as informações para chegar à tese pretendida (a este respeito ver também Ferramentas de intervenção localizadas na área de Raciocínio e no domínio da Geometria).

Para ter em mente hipóteses (apresentadas no texto da tarefa)

De acordo com Duval (1995), um desenho, em contexto geométrico dá-nos uma representação figural de uma situação geométrica, que é mais curta e mais fácil de ser compreendida do que uma representação com fala linguística.

Assim, para evitar o deslocamento constante do foco visual do aluno do texto escrito para o desenho, de modo a manter em mente as informações obtidas do texto, o professor promove a visualização no desenho das informações obtidas de forma verbal através do texto. O aluno é solicitado a reescrever as hipóteses diretamente no desenho, escolhendo os sinais gráficos apropriados em código visual não verbal. Os sinais gráficos referem-se a significados relacionados a hipóteses. Assim, a transcodificação de informações é necessária.

O professor apresenta diferentes sinais gráficos para reescrever informações sobre a figura geométrica (ou, mais em geral, sobre hipótese) de forma visual não verbal.

Noutras palavras, o professor promove o processo de transcodificação.

Na verdade, uma vez que o aluno identificou as hipóteses (a este respeito, ver também ferramentas de intervenção sobre raciocínio em geometria) no texto da tarefa, ele / ela deve traduzi-las no desenho de modo a processá-las por recuperação de facto geométrico (teorema) . Essas meta-atividades envolvem necessariamente aspectos visuo-espaciais.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Para isso, sugere-se considerar também as ferramentas de intervenção referentes à área visuoespacial no domínio da geometria.

Os principais registos semióticos envolveram:

- Sinais gráficos no desenho
- Cores
- Uso de material de concreto para apoiar a visualização (como folhas transparentes coloridas Figura 1)



Figura 1: figuras coloridas transparentes

Exemplos de Tarefas

TAREFA 1

Considere o triângulo isósceles ABD , e C é um ponto em BD que $BC = CD$. Que tipo de triângulo é CDA ? Que tipo de triângulo é BDA ?

Observe que o texto da tarefa é exclusivamente de registo verbal.

Passo 1: Identificar a hipótese

- Triângulo isósceles ABD
- C é um ponto em BD que $BC = CD$
- A é o vértice do triângulo oposto à base BD (hipótese implícita)

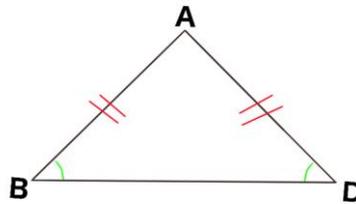
Passo 2: Processamento de informações e recuperação do teorema

- Desenho de um triângulo isósceles com base BD
- Triângulo isósceles ABD pois $AD = AB$ e o ângulo em B é igual ao ângulo em D [isso é feito lembrando o teorema sobre o triângulo isósceles].
- C é um ponto em BD que $BC = CD$ pois C é o ponto médio de BD ; C é o ponto médio de BD ; C é o pé da altura em relação à base BD [isso é feito lembrando o teorema sobre a altura no triângulo Isósceles]; Altura AC do triângulo em relação a BD .

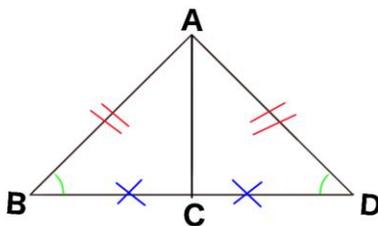
Passo 3: processo de transcodificação

- 1) Triângulo isósceles ABD ; $AD = AB$ e o ângulo em B é igual ao ângulo em D



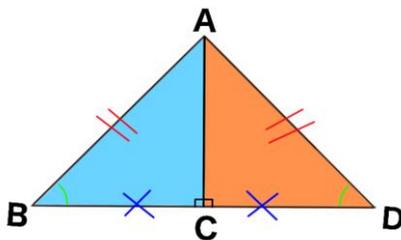


- C é um ponto em BD que $BC = CD$; C é o ponto médio de BD ; C é o pé da altura em relação à base BD ; AC é a altura do triângulo em relação a BD



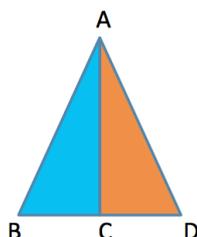
Passo 4

Desenho do processo de forma a comprovar a tese:
Que tipo de triângulo é CDA? Que tipo de triângulo é BDA?



Note que as cores permitem que os alunos identifiquem perceptivelmente as subfiguras nas quais o raciocínio se foca. Por outras palavras, as cores permitem que os alunos realizem a apreensão operativa (Duval, 1995) para investigar outras configurações.

TAREFA 2



$BC=CD, BA=AD$

Considere o triângulo ABD na figura. Que tipo de triângulo é CDA? Que tipo de triângulo é BDA?



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Passo 1: identificar a hipótese

As hipóteses devem ser identificadas no texto (triângulo ABD), no desenho adicionado ao texto (triângulos azul e laranja e o triângulo global obtido através do triângulo laranja próximo ao azul) e no código verbal adicionado ao desenho ($BC = CD$, $BA = AD$). Assim, o código verbal e o código figural apresentam as seguintes hipóteses:

Existe um triângulo “grande” (denominado ABD), este é um triângulo isósceles, neste triângulo está presente a altura em relação à base, define dois triângulos (azul e laranja)

Podemos observar que, no caso do desenho a preto e branco, a visualização dos dois triângulos (BCA e DCA) não é perceptivelmente evidente como no caso dos triângulos coloridos.

Assim, o uso de cores tornou-se uma ferramenta importante para:

- Apresentar informações (hipótese);
- Processo de informação.

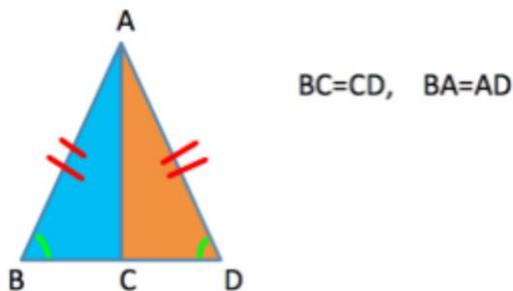
Isso diz respeito ao domínio visuoespacial porque os alunos interpretam e usam a organização espacial de representações coloridas de triângulos para processar informações e desenvolver raciocínios sobre a tarefa geométrica (ver Ferramentas de intervenção na área Visuo-espacial da Geometria)

Passo 2. Processamento de informação

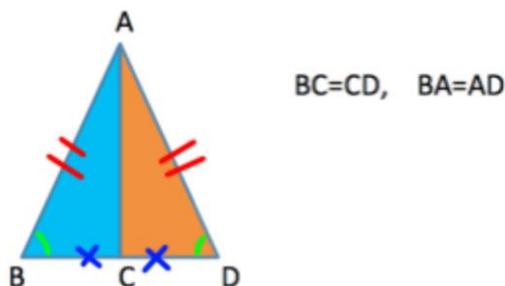
- AC é a mediana em relação à base BD do triângulo isósceles ABD ; AC é a altura em relação à base BD
- O lado AC dos triângulos azul e laranja identifica dois triângulos retângulos

Passo 3: Processo de transcodificação

- 2) $BC=CD$, $BA=AD$ ⊕ BDA é um triângulo isósceles



- 3) AC é a mediana e altura



- 4) O triângulo azul e o laranja são triângulos iguais

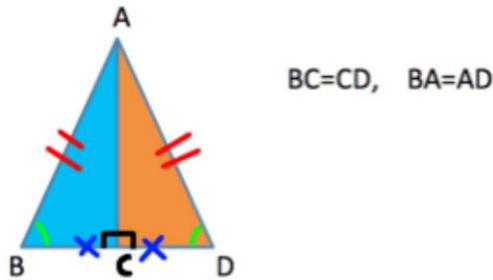


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274



3.6. Discussão através das diretrizes UDL sobre as atividades mencionadas acima

A vermelho aparecem os nossos comentários para ilustrar a conexão entre os princípios da UDL e as nossas atividades.

Tabela 3: Análise das atividades através da Tabela de princípios UDL.

Compromisso	Representação	Ação & Expressão
<p>Recrutamento de interesse</p> <p><i>Otimiza a escolha individual e a autonomia</i></p> <p><i>Otimiza a relevância, o valor e a autenticidade</i></p> <p><i>Minimiza ameaças e distrações</i></p>	<p>Percepção</p> <p><i>Fornecer maneiras de personalizar a exibição de informações</i></p> <p><i>Oferece alternativas para ouvir informações</i></p> <p><i>Oferece alternativas para informações visuais</i></p> <p><i>Diferentes registos através dos quais as informações são exibidas (visual não verbal; verbal simbólico)</i></p>	<p>Ação física</p> <p><i>Vários métodos de resposta e navegação</i></p> <p><i>Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias</i></p> <p><i>Geogebra permite aos alunos ação física sobre os objetos figurativos e dá-lhes feedbacks apropriados sobre sua ação</i></p>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Sustentação do esforço, Persistência

Aumenta a relevância das metas e objetivos

Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio

Promova a colaboração e a comunidade

Aumenta o feedback orientado para o domínio

Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio

Promove a colaboração e a comunidade

Os feedbacks orientados apoiam o compromisso e a motivação no que diz respeito à elaboração da solução da tarefa

Linguagem & Símbolos

Esclarece o vocabulário e os símbolos

Esclareça a sintaxe e a estrutura

Oferecer linguagem e símbolos alternativos para descodificar informações e trabalhar com as informações

Isso é promovido pelo uso de diferentes registos de representação: figurativo não verbal no desenho

Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos

Promove a compreensão em vários idiomas

Ilustrar através de múltiplas medias

Isso é promovido pelo uso de software de geometria dinâmica como o GeoGebra.

Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos

Isto é promovido pela visualização de hipóteses a partir de desenhos realizados pelo GeoGebra

Expressão comunicação

Usa vários meios de comunicação

Usa várias ferramentas para construção e composição

Desenvolve fluências com níveis de suporte qualificados para prática e desempenho

Usa diferentes registos para se comunicar

O registo figural quer em ambiente estático (folha de papel, folhas coloridas transparentes, ...) quer em ambiente dinâmico (GeoGebra) permite aos alunos de diferentes registos comunicarem e também processar informações.

Isso permite que gerenciem de forma mais eficiente as funções executivas.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Auto Regulação

Promove expectativas e crenças que otimizam a motivação

Facilita as habilidades e estratégias pessoais de reflexão

Desenvolve autoavaliação e reflexão

Compreensão

Ativa ou fornecer conhecimento prévio

Destaque padrões, recursos críticos, grandes ideias e relacionamentos (ponto de verificação 3.2)

Guia de processamento e visualização de informações

Para processar informações e hipóteses, as tarefas sugerem visualizá-las diretamente no desenho

Maximize a transferência e generalização

Para apoiar a generalização, as tarefas sugerem visualizar desenhos no GeoGebra. Na verdade, a função de arrastar do GeoGebra permite que os alunos identifiquem invariantes da figura e recuperem o teorema adequado para desenvolver a prova necessária.

Percepção, linguagem e símbolos, compreensão (Construir conhecimento utilizável, conhecimento que é acessível para futuras tomadas de decisão, depende não meramente de perceber informações, mas de "habilidades de processamento de informações" ativas)

Funções Executivas

Orientar o estabelecimento de metas adequadas

O uso da função arrastar para visualizar elementos invariantes na figura permite ao aluno construir uma espécie de banco de dados de imagens. Eles suportam memória para identificar, no desenho fornecido, a configuração do teorema que deve ser utilizado.

Apoio ao planeamento e desenvolvimento de estratégia

Facilita a gestão de informações e recursos

Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso

4. Referências

- 1) Duval, R.: (1995), Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing, in R. Sutherland and J. Mason (eds.), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- 2) Duval, R. (1998), Geometry from a cognitive point a view, in C. Mammana and V. Villani (eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

- 3) Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- 4) UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>
- 5) GeoGebra materials: <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>
- 6) <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3BuA>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.