



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

Demonstrando Teoremas - nível intermédio

1. Introdução

A ferramenta de intervenção foi concebida para abordar dificuldades específicas relacionadas com o domínio matemático da geometria e a área cognitiva do raciocínio. Através da ferramenta de intervenção, que é concebida para toda a turma, os alunos podem refletir sobre o processo de demonstração, com referência específica a etapas cruciais como compreensão do texto, identificação de hipóteses e teses, representação de hipóteses sobre a figura, organização da demonstração com uma sequência de instruções logicamente relacionadas.

Sugerimos considerar a ferramenta de intervenção “Demonstrando Teoremas - nível avançado” após esta. Os instrumentos têm o mesmo objetivo educativo, com dificuldade crescente quanto ao enunciado a ser demonstrado.

A ferramenta consiste numa série de perguntas que o professor pode fazer aos alunos durante uma discussão na turma. As perguntas podem ser projetadas no quadro branco. Caso os alunos tenham à disposição tablets ou computadores com ligação à internet, as questões podem ser colocadas por meio de um sistema de resposta interativo (ex.: Socrative, Mentimeter).

2. Enquadramento teórico de referência

Lembramos aqui o quadro de Karagiannakis e colegas (Tabela 1), que ajuda a caracterizar as dificuldades dos alunos em matemática.

Tabela 1: Quadro de Karagiannakis e colegas: domínios do modelo de quatro vertentes e conjuntos de competências matemáticas associadas a cada domínio

Domínio	Competências matemáticas associadas ao domínio
Números e Cálculo	Estimar com precisão um pequeno número de objetos (até 4), estimar quantidades aproximadas; localizar números na reta numérica; trabalhar com símbolos arábicos; converter um número de uma representação para outra (analógico-arábico-verbal), usar princípios de contagem.
Memória (recuperação e processamento)	Relembrar factos numéricos; descodificar terminologia (numerador, denominador, isósceles, equilátero); recordar teoremas e fórmulas; realizar cálculos mentais com fluência; recordar procedimentos e acompanhar as etapas necessárias à resolução de problemas.
Raciocínio	Compreender conceitos matemáticos, ideias e relações; compreender etapas múltiplas em procedimentos / algoritmos complexos; compreender os princípios lógicos básicos (condicionalidade - "se ... então" - comutatividade, inversão); compreender a estrutura semântica dos problemas; tomar decisões (estratégicas); fazer generalizações.
Visuo-Espacial	Interpretar e usar a organização espacial de representações de objetos matemáticos (por exemplo, números em notação decimal, expoentes, figuras 2D e 3D geométricas e rotações); representar números na reta numérica; distinguir números arábicos e símbolos matemáticos; realizar cálculos respeitando a prioridade das operações; interpretar gráficos e tabelas.

Lembramos também que, ao construirmos o questionário B2, escolhemos questões que estavam relacionadas às áreas cognitivas bem como aos três domínios matemáticos: aritmética, geometria e



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

álgebra. Como resultado, propusemos questões que estavam localizadas em algumas células da seguinte tabela (Tabela 2):

Tabela 2: Dupla relação entre áreas cognitivas (memória, raciocínio e visuoespacial) e domínios matemáticos (aritmética, geometria, álgebra).

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória			
Raciocínio			
Visuo-espacial			

Apresentamos aqui referências teóricas adicionais que nos ajudaram a conceber as ferramentas de intervenção.

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as atividades são:

1) **Princípios do Universal Design for Learning (UDL)** (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de ENVOLVIMENTO	Fornecer vários meios de REPRESENTAÇÃO	Fornecer vários meios de AÇÃO e EXPRESSÃO
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o Interesse no envolvimento : <ul style="list-style-type: none"> • Otimizar a escolha individual e a autonomia • Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade • Minimizar ameaças e distrações 	Fornecer opções para Percepção : <ul style="list-style-type: none"> • Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações • Oferecer alternativas para informações auditivas • Oferecer alternativas para informações visuais 	Fornecer opções para Ações Físicas : <ul style="list-style-type: none"> • Variar o método de resposta e navegação • Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio
Construção	Fornecer opções para Esforço e Persistência : <ul style="list-style-type: none"> • Aumentar a relevância das metas e objetivos • Variar exigências e recursos para otimizar o desafio • Promover a colaboração e o espírito de equipa • Aumentar o feedback orientado para o professor 	Fornecer opções para Linguagens e Símbolos : <ul style="list-style-type: none"> • Esclarecer vocabulário e símbolos • Esclarecer a sintaxe e a estrutura • Ajudar a decodificação de texto, notação matemática e símbolos • Promover a compreensão entre as diferentes linguagens • Ilustrar através de múltiplas representações 	Fornecer opções para Expressão e Comunicação : <ul style="list-style-type: none"> • Usar vários meios para comunicação • Usar várias ferramentas para construção e estruturação • Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Interiorização	<p>Fornece opções para Autorregulação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação • Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações • Desenvolver a autoavaliação e a reflexão 	<p>Fornece opções para Compreensão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ativar ou fornecer conhecimento prévio • Realçar padrões, características, grandes ideias e relações • Guiar o processamento e a visualização de informações • Maximizar a transmissão e generalização 	<p>Fornece opções para Funções Executivas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Orientar o estabelecimento de metas adequadas • Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias • Facilitar a gestão de informações e de recursos • Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso
Meta	Alunos que são		
	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados

O “Center for Applied Special Technology (CAST)” desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Universal Design for Learning (UDL), com o objetivo de focar a pesquisa, o desenvolvimento e a prática educacional na compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). A UDL inclui um conjunto de princípios, articulados em Diretrizes e Pontos de verificação¹. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à instrução. [...]”

Assim, a UDL foca-se nessas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e concepção de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de envolvimento. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos na recepção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. Por sua vez, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações/ideias e a sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Além disso, referimo-nos à experiência do Projeto Europeu FasMed, que incidiu na avaliação formativa em matemática e ciências, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

A avaliação formativa (AF) é concebida como um método de ensino onde "as evidências sobre o desempenho do aluno são obtidas, interpretadas e usadas por professores, alunos ou seus colegas para tomar decisões sobre as próximas etapas na instrução que provavelmente serão melhores, ou melhor fundamentadas, do que as decisões que teriam tomado na ausência das evidências que foram evidenciadas" (Black & Wiliam, 2009, p. 7). O projeto FaSMEd refere-se ao estudo de Wiliam e Thompson (2007), que identifica cinco estratégias-chave para as práticas de AF no ambiente escolar: (a) esclarecer e compartilhar intenções de aprendizagem e critérios para o sucesso; (b) desenvolver discussões eficazes em sala de aula e outras tarefas de aprendizagem que evidenciem a compreensão do aluno; (c) fornecer feedback que mova os alunos para a frente; (d) ativar os alunos como recursos instrucionais uns para os outros; (e) ativar os alunos como donos de sua própria aprendizagem. O professor, os colegas do aluno e o próprio aluno são os agentes que ativam essas estratégias de AF.

¹ Para uma lista completa dos princípios, diretrizes e pontos de verificação e uma descrição mais extensa das atividades do CAST, visite <http://www.udlcenter.org>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Tabela 4: Estratégias de avaliação formativa

	Para onde o aluno se está a direcionar	Onde o aluno está agora	Como chegar lá
Professor	1. Esclarecer as intenções de aprendizagem e os critérios para o sucesso	2. Planear discussões eficazes em sala de aula e outras tarefas de aprendizagem que evidenciem a compreensão do aluno	3. Fornecer feedback que ajude os alunos a progredir
Colega	Compreender e partilhar intenções de aprendizagem e critérios para o sucesso	4. Estimular os alunos como recursos de aprendizagens de uns para os outros	
Aluno	Compreender as intenções de aprendizagem e os critérios para o sucesso	5. Estimular os alunos como donos da sua própria aprendizagem	

As atividades do FaSMEd são organizadas em sequências, que englobam trabalhos de grupo em fichas de trabalho e discussão em aula onde os trabalhos de grupo selecionados são discutidos por toda a turma, sob a orquestração do professor. Levando em consideração as estratégias de avaliação formativa e as funcionalidades da tecnologia, Cusi, Morselli & Sabena (2017, p. 758) desenvolveram três tipos de planilhas para a atividade em sala de aula:

“(1) *questionário de problemas: fichas de trabalho que apresentam um problema e fazem uma ou mais perguntas envolvendo a interpretação ou a construção da representação (verbal, simbólica, gráfica, tabular) da relação matemática entre duas variáveis (por exemplo, interpretando um gráfico de tempo-distância)* ;

(2) *questionário de auxílio, destinadas a apoiar os alunos que enfrentam dificuldades com os formulários de problemas, fazendo sugestões específicas (por exemplo, questões norteadoras);*

(3) *questionário de votação: fichas de trabalho solicitando uma votação entre as opções propostas*”.

Os autores identificaram estratégias de feedback (Tabela 5) que o professor pode adotar para dar feedback aos alunos (Cusi, Morselli & Sabena, 2018, p. 3466). Essas estratégias são aplicadas na discussão em aula que é organizada pelo professor após o trabalho em grupo nas fichas.

Tabela 5:

Repetição	Quando o professor repete a intervenção de um aluno para chamar a atenção sobre a mesma. Frequentemente, durante a repetição, o professor enfatiza com a entoação de voz algumas palavras cruciais da frase. A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos.
Reformulação	A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos. A reformulação é aplicada quando o professor sente que a intervenção poderia ser útil, mas precisa ser comunicada de uma forma melhor para se tornar um recurso para os outros. [...] As estratégias de repetição e reformulação [...] fazem de um aluno (o autor da intervenção) um recurso para a aula.
Reformulação com apoio	Quando o professor, além de reformular, adiciona alguns elementos para orientar o trabalho dos alunos.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Recomeço	Quando o professor reage à intervenção de um aluno, que considera interessante para a turma, não dando um feedback direto, mas colocando uma questão relacionada. Desta forma, ao relançar o assunto, o professor fornece um feedback implícito [...] sobre a intervenção do aluno, sugerindo que a questão é interessante e vale a pena ser aprofundada ou, inversamente, tem alguns pontos problemáticos e deve ser reformulada.
Destaque	O destaque ocorre quando o professor chama a atenção para duas ou mais intervenções, representando duas posições distintas, de modo a promover uma comparação. Em contraposição, [...] os autores das duas posições podem ser recursos para a turma e também responsáveis pela sua aprendizagem.

Além disso, referimo-nos à literatura de pesquisa sobre a abordagem da demonstração/prova no ensino médio. Balacheff (1982) aponta que o ensino de demonstrações e teoremas deve ter o duplo objetivo de fazer os alunos compreenderem o que é uma demonstração e aprenderem a fazê-la. É importante que os alunos entendam a necessidade da demonstração, caso contrário, o risco é que eles a sintam como um discurso que visa mostrar ao professor que o aluno possui um determinado conhecimento (a demonstração corre o risco de ser vista como parte do contrato didático, ao invés de um meio para validar a afirmação).

Balacheff distingue entre demonstrações pragmáticas e demonstrações intelectuais. As primeiras são baseadas na ação real que é realizada nas representações dos objetos matemáticos, enquanto as segundas são baseadas nas experiências mentais e são realizadas por meio da linguagem.

Em particular, Balacheff ilustra:

- Empirismo Naïf (para validar a afirmação verificando alguns exemplos)
- Experiência crucial (para validar a declaração verificando um exemplo "crucial" e difícil)
- Exemplo genérico (para validar uma declaração referindo-se a um exemplo, que é considerado representativo de uma categoria inteira)
- Experiência mental (para validar uma afirmação que não se refere a um dado exemplo, avançando assim para as provas intelectuais).

O instrumento de intervenção visa orientar os alunos para a construção da demonstração. Além disso, as ferramentas de intervenção têm por objetivo suscitar a discussão sobre a necessidade de passar das demonstrações pragmáticas às intelectuais.

3. Descrição

3.1. Dificuldades identificadas através do questionário B2

A ferramenta de intervenção visa abordar dificuldades específicas que foram delineadas através dos Questionários B1 e B2 (questionário B1: questões 7-8-9-10-11; Questionário B2: Q2G1, Q2G2, Q2G3), nomeadamente dificuldades em lidar com uma figura geométrica e suas propriedades.

Além disso, o instrumento de intervenção visa preparar o aluno para a abordagem da demonstração. Por isso é denominado "nível intermédio": recomendamos abordar esta ferramenta de intervenção após ter considerado também as ferramentas referentes ao domínio geométrico e domínio cognitivo visuoespacial. . Nos recursos também se encontra um nível avançado.

3.2. Área cognitiva e domínio matemático envolvidos

A ferramenta de intervenção refere-se ao domínio matemático da geometria e à área cognitiva do raciocínio, embora haja ligações relevantes com as áreas cognitivas da memória (recuperando fatos geométricos e teoremas) e visuoespacial (lidando com uma figura geométrica, gerindo informações em diferentes representações incluindo o visuo-espacial).



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

3.3. Objetivos Educativos

Através da ferramenta de intervenção, os alunos são orientados a construir uma demonstração, refletindo sobre etapas importantes: compreensão do texto, identificação de hipóteses e teses, representação de hipóteses sobre a figura e com outros sistemas de representação (como fórmulas algébricas), lembrando já conhecidas fatos geométricos, organizando a demonstração na forma de uma cadeia dedutiva de argumentos.

A ferramenta consiste numa série de perguntas que o professor pode fazer aos alunos durante uma discussão na turma. As perguntas podem ser projetadas no quadro branco. Caso os alunos tenham à disposição tablets ou computadores com ligação à internet, as questões podem ser colocadas através de um sistema de resposta interativo (ex.: Socrative, Mentimeter).

Nesta ferramenta de intervenção colocamos em ação as diretrizes específicas da UDL.

As diretrizes do Princípio 1 (fornecem vários meios de representação), sugerem propor diferentes opções para a percepção e oferecer suporte para a decodificação de notação matemática e símbolos.

A ferramenta de intervenção oferece guia e suporte para a decodificação de um texto matemático.

As diretrizes do Princípio 2 (fornecer vários meios de ação e expressão) sugerem oferecer diferentes opções de expressão e comunicação para apoiar o planeamento e o desenvolvimento de estratégias.

A ferramenta de intervenção orienta o planeamento e o desenvolvimento da estratégia.

As diretrizes do Princípio 3 mostram como certas atividades podem atrair o interesse dos alunos, otimizando a escolha individual e a autonomia, e minimizando ameaças e distrações. Os alunos são questionados em forma de questionário (qual é a resposta correta?) De forma a promover sua participação na atividade.

Em termos de avaliação formativa, os alunos preocupam-se em fazer perguntas em forma de questionário ou perguntas abertas (estratégia 5: eles tornam-se donos de sua própria aprendizagem); os alunos são convidados a comentar as respostas incorretas de um aluno fictício (estratégia 4: tornam-se recurso para os demais); após a votação, o professor pode promover uma discussão de equilíbrio (estratégia 2); discutindo os resultados da votação o professor trabalha individualmente ou em pequenos grupos e, após cada item ou no final da atividade, o professor pode promover uma discussão em classe (estratégia de avaliação formativa 2). Os alunos discutem suas estratégias e dificuldades (estratégias 4 e 5). O professor pode monitorar o progresso dos alunos ao longo do jogo, dando feedback e avisos (estratégia 3).

3.4. Destinatários

A ferramenta de intervenção é dirigida a toda a turma.

3.5. Atividades educativas: a ferramenta de intervenção

A ferramenta consiste numa série de perguntas que o professor pode fazer aos alunos durante uma discussão na turma. As perguntas já estão colocadas numa apresentação em power point, para que o professor as projete no quadro branco.

Caso os alunos tenham à disposição tablets ou computadores com ligação à internet, as questões podem ser colocadas através de um sistema de resposta interativo (ex.: Socrative, Mentimeter).

O arquivo em power point é fornecido em separado. Aqui inserimos alguns comentários sobre a sequência de perguntas.

Os alunos recebem o texto de uma afirmação a ser demonstrada. O texto é acompanhado por uma figura.

Em primeiro lugar, os alunos devem encontrar a tese no texto. O professor pode promover uma discussão sobre as respostas dos alunos (estratégia de avaliação formativa 2).

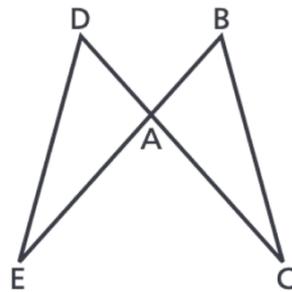


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



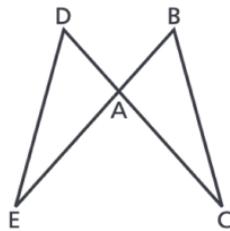
Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Segments AD and AB and segments EA and AC are respectively congruent
Show that triangles DAE and BAC are congruent

Find the thesis in the text

Alternativamente, o professor pode mostrar quatro respostas fictícias aos alunos e promover uma votação.



Segments AD and AB and segments EA and AC are respectively congruent
Show that triangles DAE and BAC are congruent

Who found the thesis?

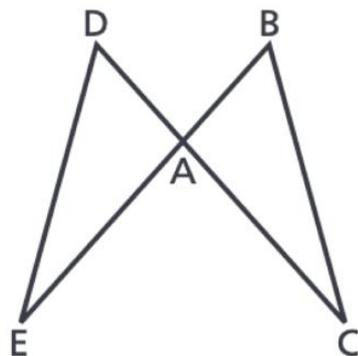
Alice:
Angles DAE and BAC are congruent

Barbara:
Triangles DAE and BAC are congruent

Claire:
Segments AD and AB are congruent

Darla:
Segments EA and AC are congruent

O mesmo processo pode ser seguido para as hipóteses do texto.



Segments AD and AB and segments EA and AC are respectively congruent
Show that triangles DAE and BAC are congruent

Find in the text the hypotheses

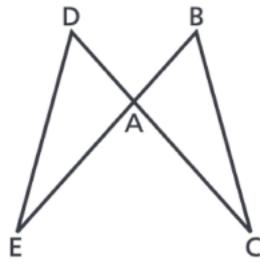


Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Segments AD and AB and segments EA and AC are respectively congruent
Show that triangles DAE and BAC are congruent

Who found an hypothesis in the text?

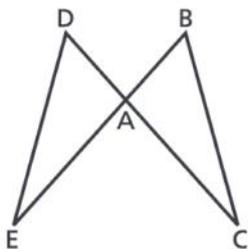
Alice:
Segments AD and EA are congruent

Barbara:
Triangles DAE and BAC are congruent

Claire:
Segments AD and AB are congruent

Darla:
Segments EA and AC are congruent

Através do slide seguinte, o professor pode promover uma discussão visando a compreensão do texto.



Segments AD and AB and segments EA and AC are respectively congruent
Show that triangles DAE and BAC are congruent

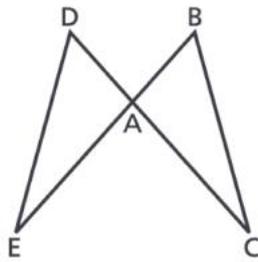
How would you rephrase the red sentence to make it more clear?

No slide seguinte, os alunos são solicitados a avaliar (e corrigir, se necessário) uma parte do processo de demonstração. Dessa forma, atuam como recursos para um colega fictício (estratégia 4) e refletem sobre a importância de organizar a demonstração como um discurso onde os enunciados devem partir da hipótese ou do conhecimento prévio (prova intelectual).



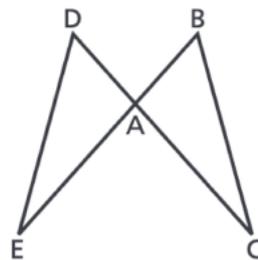
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Segments AD and AB and segments EA and AC are respectively congruent
Show that triangles DAE and BAC are congruent

- Alice: angles EAD and BAC are congruent because I have to show that triangles DAE and BAC are congruent
- Barbara: angles EAD e BAC are congruent because I can see it on the drawing
- Claire: angles EAD e BAC are congruent because they are opposite angles
- Darla: angles EAD e BAC are congruent because I know that triangles DAE and BAC are congruent



Segments AD and AB and segments EA and AC are respectively congruent
Show that triangles DAE and BAC are congruent

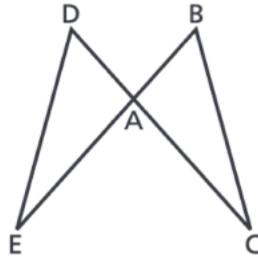
- Alice: angles EAD and BAC are congruent because I have to show that triangles DAE and BAC are congruent
- Barbara: angles EAD e BAC are congruent because I can see it on the drawing
- Claire: angles EAD e BAC are congruent because they are opposite angles
- Darla: angles EAD e BAC are congruent because I know that triangles DAE and BAC are congruent

As mesmas perguntas são feitas para todas as afirmações incorretas.

Por fim, os alunos são convidados a avaliar e comentar a demonstração fornecida por quatro alunos fictícios. Novamente, os alunos atuam como recursos para outros colegas (estratégia 4) e refletem sobre o que pode ou não representar uma demonstração (demonstração intelectual).



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Which is the correct proof? What would you say to the girls that are wrong?

Alice: by hypothesis $AD=AB$, $EA=AC$, angles DAE and BAC are congruent.
Triangles DAE and BAC are congruent for SAS criterium

Barbara: by hypothesis $AD=AB$, $EA=AC$, angles DAE and BAC are congruent because they are opposite.
Triangles DAE and BAC are congruent for the ASA criterium

Chiara: by hypothesis $AD=AB$, $EA=AC$, angles DAE and BAC are congruent because they are opposite.
Triangles DAE and BAC are congruent for the SAS criterium

Chiara: from the drawing $AD=AB$, $EA=AC$; angles DAE and BAC are congruent because they are opposite.
Triangles DAE and BAC are congruent for the SAS criterium

4. Referências

- 1) Balacheff N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol.3, pp. 261-304.
- 2) Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141. <https://doi.org/10.1080/19404158.2017.1289963>
- 3) Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.
- 4) Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. *ZDM Mathematics Education*.
- 5) Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2018). Enhancing formative assessment in mathematical class discussion: a matter of feedback. *Proceedings of CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01949286, pp. 3460-3467.
- 6) Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- 7) Robotti E., Baccaglioni-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In *Innovation & Technology*. Series Mathematics Education in the Digital Era, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.