



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

Apoio Visuo-espacial em Geometria

Universidade de Genova¹

1. Introdução

Para o desenvolvimento de atividades educativas voltadas para o apoio visuo-espacial na geometria, referimo-nos a alguns referenciais teóricos que serão descritos no ponto 2.

No ponto 3, o design das atividades educativas é descrito. Em particular, se as atividades são dirigidas aos alunos ou à turma, o objetivo pedagógico das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvidos e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2.

2. Enquadramento teórico de referência

Princípios do design universal para a aprendizagem (UDL)

Os **Princípios da UDL** (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>) estão organizadas na tabela seguinte.

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de ENVOLVIMENTO	Fornecer vários meios de REPRESENTAÇÃO	Fornecer vários meios de AÇÃO e EXPRESSÃO
	Redes afetivas O "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o Interesse no envolvimento : <ul style="list-style-type: none">• Otimizar a escolha individual e a autonomia• Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade• Minimizar ameaças e distrações	Fornecer opções para Percepção : <ul style="list-style-type: none">• Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações• Oferecer alternativas para informações auditivas• Oferecer alternativas para informações visuais	Fornecer opções para Ações Físicas : <ul style="list-style-type: none">• Variar o método de resposta e navegação• Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio
Construção	Fornecer opções para Esforço e Persistência : <ul style="list-style-type: none">• Aumentar a relevância das metas e objetivos• Variar exigências e recursos para otimizar o desafio• Promover a colaboração e o espírito de equipa• Aumentar o feedback orientado para o professor	Fornecer opções para Linguagens e Símbolos : <ul style="list-style-type: none">• Esclarecer vocabulário e símbolos• Esclarecer a sintaxe e a estrutura• Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos• Promover a compreensão entre as diferentes linguagens• Ilustrar através de múltiplas representações	Fornecer opções para Expressão e Comunicação : <ul style="list-style-type: none">• Usar vários meios para comunicação• Usar várias ferramentas para construção e estruturação• Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho

¹ Emanuela De Negri, Elisabetta Robotti, Francesca Morselli, Paola Viterbori, Anna Siri, Laura Capelli





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Interiorização	<p>Fornece opções para Autorregulação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação • Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações • Desenvolver a autoavaliação e a reflexão 	<p>Fornece opções para Compreensão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ativar ou fornecer conhecimento prévio • Realçar padrões, características, grandes ideias e relações • Guiar o processamento e a visualização de informações • Maximizar a transmissão e generalização 	<p>Fornece opções para Funções Executivas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Orientar o estabelecimento de metas adequadas • Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias • Facilitar a gestão de informações e de recursos • Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso
	Alunos que são	Determinados & Motivados	Perspícazes & Conhecedores

O Centro de Tecnologia Especial Aplicada (CAST) desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Design Universal para Aprendizagem (UDL), com o objetivo de focar na pesquisa, no desenvolvimento e na prática educacional e compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). O UDL inclui um conjunto de Princípios, articulados nas *Diretrizes* e *Pontos de Verificação*. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis em sua resposta à instrução. [...]”

Assim, o UDL foca essas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e o projeto de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de compromisso. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos na recepção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. No entanto, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações / ideias e sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para as nossas análises, vamo-nos concentrar em particular nas diretrizes específicas dos três Princípios.²

Para caracterizar as dificuldades dos alunos em geometria, referimo-nos aos seguintes elementos do referencial de Karagiannakis e colegas (Tabela 1), que trataram da Memória na recuperação de fatos geométricos e processamento geométrico: recuperação de fatos geométricos, lembrando teoremas, lembrando hipóteses e teses que se estão a focar.

Tabela 1: Quadro de Karagiannakis e colegas: domínios do modelo de quatro vertentes e conjuntos de habilidades matemáticas associadas a cada domínio

Domínio	Competências matemáticas associadas ao domínio
Números e Cálculo	Estimar com precisão um pequeno número de objetos (até 4), estimar aproximadamente quantidades; situar números na reta numérica; gerir símbolos árabes; transcodificar um número de uma representação para outra (analógico-arábico-verbal), ter consciência dos princípios de contagem.
Memória (recuperação e processamento)	Relembrar fatos numéricos; decodificar a terminologia (numerador, denominador, isósceles, equilátero); recordar teoremas e fórmulas; realizar cálculos mentais com fluência; recordar dos procedimentos e acompanhar as

²3 Estes itens foram retirados da lista interativa em <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





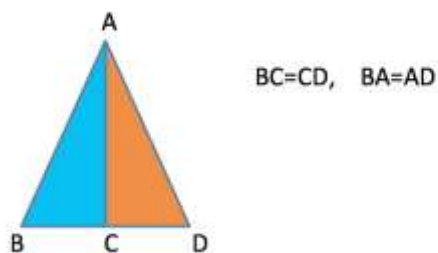
Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

	etapas de resolução dos problemas.
Raciocínio	Compreender conceitos matemáticos, ideias e relações; Compreender etapas múltiplas em procedimentos / algoritmos complexos; compreensão dos princípios lógicos básicos (condicionalidade - "se ... então" - comutatividade, inversão); compreensão da estrutura semântica dos problemas; tomar decisões (estatísticas); generalização.
Visuo-Espacial	Interpretar e usar a organização espacial de representações de objetos matemáticos (por exemplo, números em notação decimal, expoentes, figuras 2D e 3D geométricas e rotações); situar números na reta numérica; confundir números arábicos e símbolos matemáticos; realização de cálculos escritos com prioridade das operações; interpretar gráficos e tabelas.

3. Descrição

3.1 Dificuldades identificadas através do questionário B2

Detetámos dificuldades no seguinte item de B2:



Que tipo de triângulo é CDA?

Que tipo de triângulo é BDA?

As dificuldades estão relacionadas com o processo de visualização, que se refere ao uso da figura (desenho) para ilustrar os objetos geométricos e à manipulação dessa figura para relacionar configuração (ões) com princípios geométricos.

3.2 Área cognitiva e domínio matemático envolvidos

A área de dificuldades identificada pelo questionário B2 está relacionada ao domínio da Geometria. Visuo-espacial é a área cognitiva envolvida.

Na Tabela 1 está representada a localização das dificuldades com relação à área cognitiva e domínio matemático.



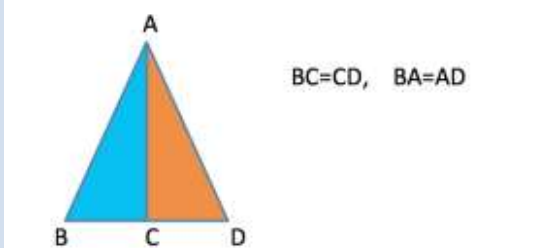
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Tabela 1: As dificuldades detetadas estão ligadas à área cognitiva da Memória e ao domínio da Geometria

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória			
Raciocínio			
Visuo-espacial		 <p>BC=CD, BA=AD</p> <p>Que tipo de triângulo é CDA? Que tipo de triângulo é BDA?</p>	

3.3 Objetivos Educativos

A ferramenta de intervenção visa apoiar o processo de visualização no que se refere à utilização de figuras e imagens para ilustração, exploração ou verificação de diferentes situações geométricas.

3.4 Destinatários

A ferramenta de Intervenção articula-se em duas atividades que devem ser realizadas com o aluno ou com toda a turma.

3.5 Atividades educativas: a ferramenta de intervenção

De acordo com o modelo cognitivo de raciocínio geométrico de Duval, a figura desempenha um papel fundamental (Duval, 1995). Na verdade, uma figura dá-nos uma representação figural de uma situação geométrica que é mais curta e mais fácil de ser compreendida do que uma representação com fala linguística (a esse respeito, consulte a ferramenta de intervenção chamada: “Apoio à memória no processo de demonstração geométrica”).

Além disso, Duval refere-se a diferentes apreensões cognitivas de figuras, consideradas como a forma de ver, construir e descrever uma figura geométrica e suas propriedades.

1. Apreensão perceptual: trata-se do reconhecimento físico (forma, representação, tamanho, brilho, etc.) de uma figura dada. Devemos também discriminar e reconhecer subfiguras dentro das figuras dadas, uma vez que uma discriminação ou reconhecimento relevante dessas unidades de subfiguração pode ajudar e fornecer dicas para a solução de problemas em situações geométricas.

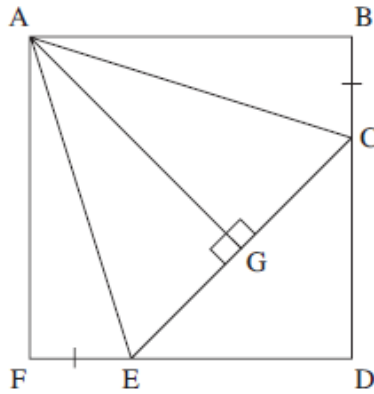


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

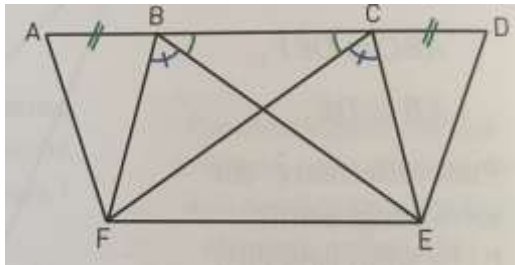
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Ou a seguinte figura:



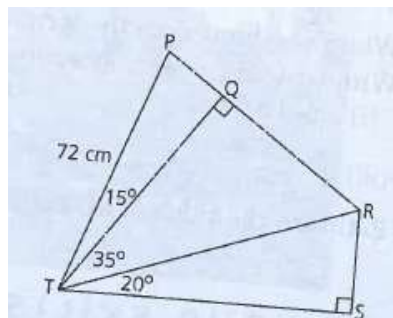
Por exemplo, as subfiguras FBE e FCE que também estão sobrepostas.

2. Apreensão sequencial: trata-se da construção de uma figura ou da descrição da sua construção. Tal construção depende de restrições técnicas e também de propriedades matemáticas, uma vez que a construção de uma figura pode juntar diferentes tipos de figuras, que funcionam como unidades. Acredita-se que a construção pode ajudar no reconhecimento de relações entre propriedades matemáticas e restrições técnicas.

3. Apreensão discursiva: trata-se de (a) a habilidade de relacionar configuração (ões) com princípios geométricos, (b) a habilidade de fornecer boa descrição, explicação, argumentação, dedução, uso de símbolos, raciocínio dependendo de afirmações feitas na percepção apreensão, e (c) a capacidade de descrever figuras através de linguagem geométrica / textos narrativos

4. Apreensão operativa: trata-se de fazer modificações numa determinada figura de várias maneiras para investigar outras configurações:

- A forma mereológica: dividir toda a figura dada em partes de várias formas e combinar essas partes noutra figura ou subfiguras;
- A forma ótica: variando o tamanho das figuras; pode tornar uma forma maior, mais estreita ou inclinada, as formas podem ter uma aparência diferente;
- A forma do lugar: variando a posição ou a sua orientação.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Em particular, a apreensão perceptual e a apreensão operativa estão estritamente relacionadas à visualização da figura.

Para isso, as atividades educativas desta ferramenta de intervenção são concebidas como meta-atividades para desenvolver estratégias que permitam aos alunos apoiar tanto a apreensão perceptual como a apreensão operativa.

Visualizando relações através de representações dinâmicas

A construção geométrica de uma figura por ferramentas digitais como o GeoGebra parece ser eficaz para discriminar e reconhecer subfiguras dentro das figuras percebidas. Na verdade, a função de arrastar, disponível neste tipo de ferramenta, permite aos alunos identificar invariantes geométricos e arrastar figuras sobrepostas, reconhecendo relações entre propriedades matemáticas e restrições técnicas.

Além disso, a modificação dinâmica de elementos geométricos permite aos alunos identificar relações entre eles.

Por exemplo, considere a seguinte tarefa:

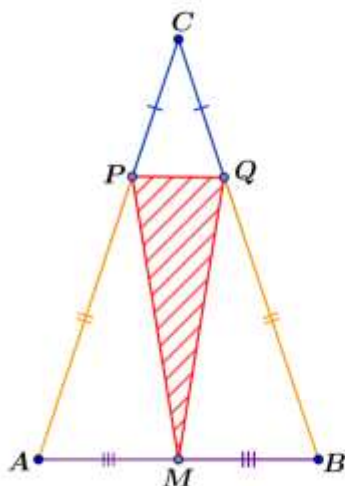
TAREFA 1

Num triângulo isósceles, ABC determina o ponto médio M da base AB. Pegue um ponto P no lado AC e um ponto Q no lado BC de forma que seja $CP \cong CQ$. Mostre que o triângulo MPQ também parece ser isósceles.

Os alunos são solicitados a:

- Construir no GeoGebra a figura necessária para que seja resistente ao arrasto (ver construção de GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/MaUCMhcM>);
- Mova os pontos P e Q, A e B para identificar os invariantes. O que é perguntado aqui é a apreensão operativa da figura, variando o tamanho das figuras.

Observe que a figura pode ser colorida como na Figura 1. A cor apoia a apreensão perceptual, promovendo a visualização das subfiguras e suas relações



Hp.:

$$AC \cong CB$$

$$AM \cong MB$$

$$A, P, C: \text{all.ti}$$

$$B, Q, C: \text{all.ti}$$

$$CP \cong CQ$$

Th.:

$$PM \cong QM$$

Figura 1: subfiguras coloridas para apoiar a ligação da (s) configuração (ões) com princípios geométricos.





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

TAREFA 2:

Forneça aos alunos os triângulos congruentes ABC e A'B'C' do GeoGebra (Figura 2) construídos de forma que, ao alterar o valor de AB, AC ou α , os alunos possam identificar invariantes e visualizar propriedades.

Os alunos são convidados a:

- Alterar o valor de AB, AC ou α . Isso permite que os alunos realizem tanto a apreensão perceptual quanto a apreensão operativa
- Descrever o que muda e o que não muda no ABC e A'B'C'. Noutras palavras, é solicitado a identificar invariantes nos triângulos ABC e A'B'C'

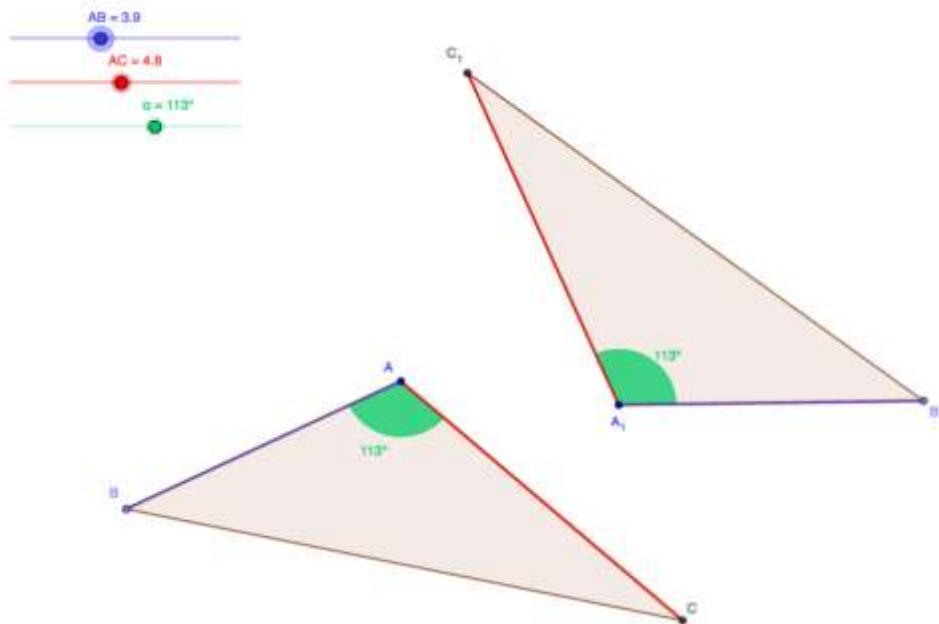


Figura 2: Figura ampliada relacionada com o primeiro dos critérios para triângulos congruentes

Observe que os dois lados congruentes correspondentes dos triângulos ABC e A'B'C' são coloridos a azul e vermelho. Da mesma forma, os ângulos são coloridos a verde para melhor identificá-los dentro da figura.

Para explorar com o GeoGebra as condições para que os triângulos sejam congruentes, consulte a atividade no seguinte link:

<https://www.geogebra. / m / thA4JzgH>

3.6. Discussão através das diretrizes UDL sobre as atividades mencionadas acima

Na tabela, a vermelho aparecem os nossos comentários para ilustrar a ligação entre os princípios da UDL e as nossas atividades.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Tabela 3: Análise das atividades através da Tabela de princípios UDL.

<i>Compromisso</i>	<i>Representação</i>	<i>Ação & Expressão</i>
<p><i>Recrutamento de interesse</i></p> <p>Otimiza a escolha individual e a autonomia</p> <p>Otimiza a relevância, o valor e a autenticidade</p> <p>Minimiza ameaças e distrações</p>	<p><i>Percepção</i></p> <p>Fornecer maneiras de personalizar a exibição de informações</p> <p>Oferece alternativas para ouvir informações</p> <p>Oferece alternativas para informações visuais</p> <p>Diferentes registos através dos quais as informações são exibidas (visual não verbal; verbal simbólico)</p>	<p><i>Ação física</i></p> <p>Vários métodos de resposta e navegação</p> <p>Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias</p>





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

<p><i>Sustentação do esforço, Persistência</i></p> <p>Aumenta a relevância das metas e objetivos</p> <p>Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio</p> <p>Promova a colaboração e a comunidade</p> <p>Aumenta o feedback orientado para o domínio</p> <p>Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio</p> <p>Promove a colaboração e a comunidade</p> <p>Os feedbacks orientados apoiam o compromisso e a motivação no que diz respeito à elaboração da solução da tarefa</p> <p><i>Aprender, mas também reconhecer ou aplicar no desenho propriedades geométricas, como as relações entre triângulos (critérios dos triângulos congruentes), requer atenção e esforço constantes. Por exemplo, desenhar triângulos, visualizar elementos geométricos (lados, ângulos), suas relações e regularidades requerem esforço persistente e articulado. GeoGebra é uma ferramenta eficaz que auxilia os alunos no gerenciamento de desenho, visualização e recuperação de propriedades geométricas ao mesmo tempo.</i></p>	<p><i>Linguagem & Símbolos</i></p> <p>Esclarece o vocabulário e os símbolos</p> <p>Esclareça a sintaxe e a estrutura</p> <p>Oferecer linguagem e símbolos alternativos para decodificar informações e trabalhar com as informações</p> <p><i>Isso é promovido pelo uso de diferentes registos de representação</i></p> <p>Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos</p> <p>Promove a compreensão em vários idiomas</p> <p>Ilustrar através de múltiplas medias</p> <p><i>Isso é promovido pelas atividades de transcodificação entre diferentes registros de representação (gráfica, simbólica)</i></p> <p>Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos</p> <p><i>Isso é promovido pela visualização de diferentes registros ao mesmo tempo</i></p>	<p><i>Expressão comunicação</i></p> <p>Usa vários meios de comunicação</p> <p>Usa várias ferramentas para construção e composição</p> <p>Desenvolve fluências com níveis de suporte qualificados para prática e desempenho</p> <p>Usa diferentes registos para se comunicar</p>
---	--	---



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

<i>Auto Regulação</i>	<i>Compreensão</i>	<i>Funções Executivas</i>
<p>Promove expectativas e crenças que otimizam a motivação</p> <p>Facilita as habilidades e estratégias pessoais de reflexão</p> <p>Desenvolve autoavaliação e reflexão</p>	<p>Ativa ou fornecer conhecimento prévio</p> <p>Destaque padrões, recursos críticos, grandes ideias e relacionamentos (ponto de verificação 3.2)</p> <p>Guia de processamento e visualização de informações</p> <p>Maximize a transferência e generalização</p> <p>Percepção, linguagem e símbolos, compreensão (Construir conhecimento utilizável, conhecimento que é acessível para futuras tomadas de decisão, depende não meramente de perceber informações, mas de "habilidades de processamento de informações" ativas)</p> <p><i>A visualização associada à função de arrastar, promove tanto a apreensão perceptual de figuras quanto a apreensão operativa</i></p>	<p><i>Orientar o estabelecimento de metas adequadas</i></p> <p><i>O uso de registo visual de representação para visualizar hipóteses no desenho pode ser um suporte para a memória e um suporte para o raciocínio. Isso pode orientar o processo de recuperação do teorema e do processo de informação dos alunos.</i></p> <p><i>Apoio ao planeamento e desenvolvimento de estratégia</i></p> <p><i>Facilita a gestão de informações e recursos</i></p> <p><i>Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso</i></p>

4. Referências

- 1) Duval, R.: 1995a, 'Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing', in R. Sutherland and J. Mason (eds.), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- 2) Duval, R.: 1998b, 'Geometry from a cognitive point a view', in C. Mammana and V. Villani (eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.
- 3) Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115–141.
- 4) UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.