



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

Compreender o significado de modelar um problema usando habilidades lógico-matemáticas

1. Introdução

A fim de desenvolver um conjunto de atividades educacionais voltadas para a resolução de problemas algébricos, fazemos referência a alguns referenciais teóricos que serão descritos na secção 2.

Na secção 3, é feita a descrição das atividades educacionais. Em particular, se as atividades são dirigidas a um único aluno ou à turma, o objetivo pedagógico das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvido e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2.

2. Enquadramento teórico de referência

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as seguintes atividades são:

1) **Princípios do Universal Design for Learning (UDL)** (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de ENVOLVIMENTO	Fornecer vários meios de REPRESENTAÇÃO	Fornecer vários meios de AÇÃO e EXPRESSÃO
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o Interesse no envolvimento : <ul style="list-style-type: none"> Otimizar a escolha individual e a autonomia Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade Minimizar ameaças e distrações 	Fornecer opções para Percepção : <ul style="list-style-type: none"> Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações Oferecer alternativas para informações auditivas Oferecer alternativas para informações visuais 	Fornecer opções para Ações Físicas : <ul style="list-style-type: none"> Variar o método de resposta e navegação Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio
Construção	Fornecer opções para Esforço e Persistência : <ul style="list-style-type: none"> Aumentar a relevância das metas e objetivos Variar exigências e recursos para otimizar o desafio Promover a colaboração e o espírito de equipa Aumentar o feedback orientado para o professor 	Fornecer opções para Idiomas e Símbolos : <ul style="list-style-type: none"> Esclarecer vocabulário e símbolos Esclarecer a sintaxe e a estrutura Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos Promover a compreensão entre as diferentes linguagens Ilustrar através de múltiplas representações 	Fornecer opções para Expressão e Comunicação : <ul style="list-style-type: none"> Usar vários meios para comunicação Usar várias ferramentas para construção e estruturação Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Interiorização	<p>Fornece opções para Autorregulação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação • Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações • Desenvolver a autoavaliação e a reflexão 	<p>Fornece opções para Compreensão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ativar ou fornecer conhecimento prévio • Realçar padrões, características, grandes ideias e relações • Guiar o processamento e a visualização de informações • Maximizar a transmissão e generalização 	<p>Fornece opções para Funções Executivas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Orientar o estabelecimento de metas adequadas • Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias • Facilitar a gestão de informações e de recursos • Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso 	
	Alunos que são			
Meta	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhededores	Estratégicos e Focados	

O “Center for Applied Special Technology (CAST)” desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Universal Design for Learning (UDL), com o objetivo de focar a pesquisa, o desenvolvimento e a prática educacional na compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). A UDL inclui um conjunto de princípios, articulados em Diretrizes e Pontos de verificação¹. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à instrução. [...]”

Assim, a UDL foca-se nessas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e conceção de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de envolvimento. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de perceção envolvidos na receção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. Por sua vez, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações/ ideias e a sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para as nossas análises, vamos focar-nos em particular nas diretrizes específicas dos três princípios.

As diretrizes do Princípio 1 (fornecer vários meios de representação), sugerem propor diferentes opções de perceção e oferecer suporte para a descodificação de notações e símbolos matemáticos. Além disso, as diretrizes sugerem a importância de fornecer opções para padrões de destaque de compreensão, características, ideias-chave e relações entre noções matemáticas.

Além disso, as diretrizes do Princípio 2 (fornecer vários meios de ação e expressão) sugerem oferecer diferentes opções de expressão e comunicação para apoiar o planeamento e o desenvolvimento de estratégias. Finalmente, as diretrizes do Princípio 3 mostram como certas atividades podem atrair o interesse dos alunos, otimizando a escolha individual e a autonomia e minimizando ameaças e distrações.

¹ Para uma lista completa dos princípios, diretrizes e pontos de verificação e uma descrição mais extensa das atividades do CAST, visite <http://www.udlcenter.org>





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Na secção 4, analisaremos exemplos de atividades, classificando-as tanto pelo tipo de aprendizagem matemática para que são projetadas como pela área cognitiva que apoiam.

2) Enquadramento teórico para melhorar o raciocínio matemático

“A matemática é importante, mas também é uma história. O raciocínio matemático tem a ver por fórmulas e cálculos, mas ainda mais com a argumentação, uma vez que com ela levamos os alunos a raciocinar e refletir, a confrontar-se e a questionar-se e, por meio desse método, muitas vezes a aprender sem se aperceber”.

“O ambiente de aprendizagem deve dizer respeito à dimensão organizacional (gestão de espaços, equipamentos, tempos), à dimensão didática, à dimensão relacional (clima positivo de aprendizagem e regras de comportamento partilhadas). Em qualquer idade, se os alunos não estão acostumados a discutir, nas primeiras vezes que são solicitados para o fazerem ficam perplexos, desorientados, não entendem o propósito do pedido”.

“O professor deve ser capaz de estimulá-los continuamente a discutir e comparar, porque só argumentando se aprende a argumentar”... Discutir em aula também é muito importante para dar oportunidade de ouvir os argumentos dos outros e analisar os pontos fracos e pontos fortes de cada aluno. Discutir, explicar o porquê das coisas, também fortalece muito o conhecimento dos aspectos mais específicos do conteúdo, que de outra forma seriam rapidamente esquecidos ...”(Tiziana Bonasso, Universidade de Torino, Itália, “Atti del convegno: 8 ottobre 2015” - “Contare e ... raccontare, imparare matematica attraverso il dialogo e il confronto”).

Desde que o homem se tornou autoconsciente, sempre tentou modelar a realidade; cabe a nós, professores, transmitir o gosto e a diversão de o fazer.

As atividades seguintes estão relacionadas com a vida diária, família, turma e grupo de alunos, para desenvolver o raciocínio e intuição do aluno, para adquirir consciência e boas capacidades racionais e lógicas em matemática, muito úteis para a resolução de problemas.

“Ao vincular a teoria matemática ao mundo real, além de estimular o interesse, promove a aprendizagem ativa, ajuda a abordar o estudo como descoberta e promove a compreensão de conceitos matemáticos. Hoje é possível propor uma abordagem elementar à modelação matemática desde a escola secundária, em parte graças ao apoio das novas tecnologias.

Este processo permite que as crianças apreciem o potencial da linguagem matemática e forneçam uma chave para assimilar a teoria com consciência. Eles descobrem que, graças à abstração matemática, o mesmo modelo é capaz de representar múltiplos fenómenos, mesmo que sejam muito diferentes uns dos outros. Além disso, ferramentas e técnicas podem ser adaptadas ou montadas para lidar com novos problemas. Um pouco como se faz com as construções de Lego, onde poucos elementos básicos permitem realizar uma grande variedade de estruturas, até mesmo muito complexas.”

“A ideia norteadora da renovação é desenvolver uma atitude experimental em relação à Matemática, destacando o seu papel fundamental na modelação das ciências aplicadas.

O modelo matemático de um fenómeno (ou problema) da vida real é um processo de racionalização que visa fornecer uma descrição sintética e objetiva. O fenómeno pode assim ser examinado, possivelmente controlado e podem ser feitas previsões sobre a sua evolução. Nos últimos anos, a difusão e o aparecimento de ferramentas de computação e representação gráfica cada vez mais poderosas e sofisticadas deram um forte impulso ao desenvolvimento de modelos matemáticos mesmo em disciplinas “não tradicionais”.”(P. Brandi, R. Ceppitelli, A. Salvadori, Universidade de Perugia, Itália, “Introduzione elementare alla modellizzazione matematica”, 2002)

“O modelo matemático permite-nos descrever o comportamento de uma ampla gama de fenómenos e sistemas na natureza e na sociedade. Com simulações, eles permitem-nos prever a evolução de tais sistemas sem realmente os testar no mundo real. Dessa forma, não só é mais barato, seguro e rápido, mas também ajuda a desenvolver capacidades de pensamento crítico e analítico nos alunos. Depois de gerar um modelo preliminar, pode-se facilmente considerar vários cenários fazendo pequenas alterações no modelo.” (J. A. Conejero)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

3. Design

Encontramos bastantes dificuldades no seguinte exercício do questionário B2:

Q3Ar2. Represente de através de uma expressão algébrica o seguinte jogo: “Pense num número, duplique-o, some 4, depois divida por 2 e subtraia o número que você pensou”.
Se você jogar este jogo, obterá 2 como resultado: por quê?

3.1. Dificuldades identificadas através do questionário B2

A ferramenta de intervenção é apresentada para dar resposta a uma dificuldade específica detectada pelo questionário B2. A sequência de indicações ajuda a construir o modelo matemático de referência, mas o resultado não é imediato, há sempre uma ligação lógica com o significado do cálculo. É necessário deixar claro para nós o conceito de número. Kieran (1996) propôs um modelo de atividade algébrica que serviu alguns anos depois como base para uma definição de pensamento algébrico nos anos de aprendizagem iniciais - a definição que não dependia do uso da letra-simbólica (Kieran 2004): “ O pensamento algébrico nos anos de aprendizagem iniciais envolve o desenvolvimento de maneiras de pensar dentro de atividades para as quais a letra-simbólica poderia ser usada como uma ferramenta, ou alternativamente dentro de atividades que poderiam ser realizadas sem usar a letra-simbólica, por exemplo, analisar relações entre as quantidades, observando a estrutura, estudando a mudança, generalizando, resolvendo problemas, modelando, justificando, provando e prevendo. (p. 149). ”

3.2. Área cognitiva e domínio matemático de interesse

A área de dificuldade identificada através do questionário B2 está ligada ao domínio da Aritmética, raciocínio (Tabela 1)

Tabela 1: As dificuldades detectadas estão relacionadas ao raciocínio da Aritmética.

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória			
Raciocínio	Q3Ar2		
Visuo-espacial			

3.3. Objetivos Educacionais

Esta ferramenta de intervenção permite ao professor melhorar a área cognitiva do raciocínio em Aritmética a partir de exemplos muito simples que permitem compreender o problema.

3.4. Destinatários

A ferramenta de intervenção pode ser direccionada a toda a turma. O professor agrupa os alunos tendo em conta os seus diferentes níveis de competências e envolve-os na verbalização das regras do jogo.

3.5. Atividades educacionais: a ferramenta de intervenção

Nesta secção, as atividades educacionais são descritas por etapas.

1. O professor dá aos alunos os mesmos lápis, bolas ou pequenos objetos e pede aos alunos que sigam as instruções do jogo usando os itens disponíveis.

a) Pense num número (neste caso, o número corresponde ao número de bolas escolhidas) por exemplo, um aluno escolhe 3 bolas: ⊗ ⊗ ⊗

b) Duplique-o : ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

c) Some 4: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ + ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ = ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

d) Divida por 2: (⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗) (⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗)

e) Considere somente um dos grupos para o próximo passo

f) Subtraia o número que você pensou: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ - ⊗ ⊗ ⊗ = ⊗ ⊗

g) O resultado é: ⊗ ⊗

2. Agora o professor/a propõe aos alunos, sempre divididos em grupos, que experimentem o jogo com outros números iniciais, usando os lápis de cor das caixas e que sigam atentamente os passos até descobrir o resultado final. Dar um tempo de resolução, o grupo que terminar primeiro abrirá a discussão para explicar o resultado.

a) Pense num número, por exemplo, por exemplo se os alunos escolhem 2 bolas: ⊗ ⊗

b) Duplique-o: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

c) Some 4: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ + ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ = ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

d) Divida por 2 : (⊗ ⊗ ⊗ ⊗) (⊗ ⊗ ⊗ ⊗)

e) Considere somente um dos grupos para o próximo passo

f) Subtraia o número que pensou: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ - ⊗ ⊗ = ⊗ ⊗

g) O resultado é: ⊗ ⊗

3. Todos juntos, professor/a e alunos, descubrem que o resultado será sempre o mesmo, considerando também os números dos outros grupos. = ⊗ ⊗

4. O professor agora propõe mudar a instrução (c) e ao invés de somar 4, somar 6 e refazer o jogo para descobrir o resultado.

a) Pense num número, por exemplo, por exemplo os alunos escolhem 3 bolas: ⊗ ⊗ ⊗

b) Duplique-o: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

c) Some 6: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ + ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ = ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

d) Divida por 2: (⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗) (⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗)

e) Considere somente um grupo para o próximo passo

f) Subtraia o número que pensou: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ - ⊗ ⊗ ⊗ = ⊗ ⊗ ⊗

g) O resultado é: ⊗ ⊗ ⊗

5. Agora o professor/a propõe aos alunos, sempre divididos em grupos, que experimentem o jogo com outros números iniciais. O grupo que terminar primeiro abrirá a discussão para explicar o resultado. Em seguida, uma discussão pode ser aberta entre os grupos para comparar os resultados obtidos. Os alunos, trabalhando juntos, descobrem que o resultado final, com essa mudança, será sempre ⊗ ⊗ ⊗



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

6. Novamente o professor/a propõe mudar a instrução (c) e ao invés de somar 6, somar 8 e seguir os passos anteriores de a) a g) até ao próximo ponto de discussão.

7. Se nenhum aluno descobrir as regras escondidas no jogo, o professor mostra um caminho para uma discussão comum e duas coisas serão descobertas:

- 1) Os números (bolas ou lápis) a serem utilizados em (c), neste jogo, devem ser divisíveis em duas partes iguais, na verdade, ao colocar um número que não pode ser dividido por dois, as bolas (ou lápis) tiradas não podem ser separados em dois grupos iguais;
- 2) O resultado não depende do número escolhido em (a), mas em (c) e é exatamente igual à sua metade.

8. Em conclusão, após a discussão com os alunos, o professor propõe-se a representar o resultado obtido com símbolos. O professor divide o quadro da aula em duas partes iguais: num lado do quadro o professor vai escrever o jogo passo a passo como os alunos fizeram, na outra metade, vai escrever o jogo em linguagem matemática:

$$\frac{2n + N}{2} - n = \frac{2n}{2} + \frac{N}{2} - n = n + \frac{N}{2} - n = \frac{N}{2}$$

onde: **n**= número escolhido
 N=número somado

9. O professor/a convida os alunos a proporem o jogo a amigos ou familiares.

4. Discussão através das diretrizes do UDL sobre as atividades anteriores

Observe que o mesmo propósito educacional de 'brincar' com números é abordado de maneiras diferentes, agindo de acordo com os três princípios da UDL (Tabela 7, **a vermelho**, comentários para ilustrar a ligação entre os princípios e nossas atividades).

Tabela 7: Análise das atividades através da Tabela de Princípios UDL.

Compromisso	Representação	Ação e expressão
Interesses de recrutamento	Percepção Fornece maneiras de personalizar a exibição de informações Oferece alternativas para ouvir informações Oferece alternativas para informações visuais Uso de pequenos objetos comuns encontrados na sala de aula (bolas de lápis)	Ação Física Vários métodos de resposta e navegação manipulando os elementos a serem processados manualmente
Esforço de apoio e persistência	Linguagem & Símbolo Tradução simples em linguagem matemática de uma descoberta	Expressão da comunicação descobrir como grupo que a regra encontrada



Co-funded by the
 Erasmus+ Programme
 of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

		funciona
Auto-regulação	<p>Compreensão</p> <p>Ativa e fornece conhecimento básico</p> <p>Gestão de números</p> <p>Destacar padrões, recursos críticos, boas ideias e relacionamentos</p> <p>O uso de objetos (bolas, lápis ...) permite ter uma intenção maior com sequência e evolução do jogo</p> <p>Guia de processamento de informações</p> <p>Maximizar a transferência e generalidade através de testes práticos, realizados em grupo, os alunos podem representar os resultados obtidos e prever outros</p>	Função executiva

5. Referências

- [1] P.Brandi R.Ceppitelli A.Salvadori, Introduzione elementare alla modellizzazione matematica, (CD con software applicativo) Università degli Studi di Perugia (2002)
<http://matematica-old.unibocconi.it/brandi/modelli.htm>
- [2] J. Alberto Conejero, "Opinion article in the newspaper Levante-EMV on the International Day of Mathematics", [Grado Matemáticas - UPV](#)
- [3] <https://www.mathplanet.com/education/algebra-1/discovering-expressions,-equations-and-functions/composing-expressions>
- [4] <https://www.mathsisfun.com/numbers/index.html>
- [5] <https://www.mathsisfun.com/algebra/index.html>
- [6] <https://www.homeschoolmath.net/teaching/teach-solve-word-problems.php>
- [7] <https://www.mathsisfun.com/place-value.html>
- [8] <https://www.mathsisfun.com/numbers/addition.html>
- [9] <https://www.mat.univie.ac.at/~neum/model.html>
- [10] <https://www.mathsisfun.com/algebra/mathematical-models.html>
- [11] <https://projectfenix1.wordpress.com/>
- [12] https://difima.i-learn.unito.it/pluginfile.php/8562/mod_resource/content/1/DIFIMA_8_ottobre_Abstract.pdf
- [13] <https://www.docsity.com/it/appunti-corso-appendimento-matematico-di-passolunghi/4656437/>
- [14] C. Kieran, "Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?", The Mathematics Educator 2004, Vol.8, No.1, 139 - 151



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.