

## FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

# Compreender os papéis desempenhados por letras e números na Álgebra

### 1. Introdução

O instrumento de intervenção aqui proposto visa conduzir os alunos a uma compreensão dos papéis desempenhados pelas letras e números na Álgebra, a partir da deteção das dificuldades relacionadas com a construção do significado da variável, da expressão em função de tal variável e, em particular, sobre a ação diferente que a posição dos números e letras desempenha na expressão, isto é, sobre o papel da letra e dos números na expressão. Para desenvolver este percurso educativo, referimo-nos a alguns referenciais teóricos que serão descritos na secção 2.

Na secção 3, é feita a descrição das atividades educacionais. Em particular, se as atividades são dirigidas a um único aluno ou à turma, o objetivo pedagógico das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvido e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2.

### 2. Enquadramento teórico de referência

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as atividades são:

**1) Princípios do Universal Design for Learning (UDL)** (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de <b>ENVOLVIMENTO</b>	Fornecer vários meios de <b>REPRESENTAÇÃO</b>	Fornecer vários meios de <b>AÇÃO e EXPRESSÃO</b>
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o <b>Interesse no envolvimento</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>• Otimizar a escolha individual e a autonomia</li> <li>• Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade</li> <li>• Minimizar ameaças e distrações</li> </ul>	Fornecer opções para <b>Percepção</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>• Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações</li> <li>• Oferecer alternativas para informações auditivas</li> <li>• Oferecer alternativas para informações visuais</li> </ul>	Fornecer opções para <b>Ações Físicas</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>• Variar o método de resposta e navegação</li> <li>• Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio</li> </ul>

Construção	<p>Fornece opções para <b>Esforço e Persistência:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aumentar a relevância das metas e objetivos</li> <li>• Variar exigências e recursos para otimizar o desafio</li> <li>• Promover a colaboração e o espírito de equipa</li> <li>• Aumentar o feedback orientado para o professor</li> </ul>	<p>Fornece opções para <b>Idiomas e Símbolos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Esclarecer vocabulário e símbolos</li> <li>• Esclarecer a sintaxe e a estrutura</li> <li>• Ajudar a decodificação de texto, notação matemática e símbolos</li> <li>• Promover a compreensão entre as diferentes linguagens</li> <li>• Ilustrar através de múltiplas representações</li> </ul>	<p>Fornece opções para <b>Expressão e Comunicação:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usar vários meios para comunicação</li> <li>• Usar várias ferramentas para construção e estruturação</li> <li>• Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho</li> </ul>
	<p>Fornece opções para <b>Autorregulação:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação</li> <li>• Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações</li> <li>• Desenvolver a autoavaliação e a reflexão</li> </ul>	<p>Fornece opções para <b>Compreensão:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ativar ou fornecer conhecimento prévio</li> <li>• Realçar padrões, características, grandes ideias e relações</li> <li>• Guiar o processamento e a visualização de informações</li> <li>• Maximizar a transmissão e generalização</li> </ul>	<p>Fornece opções para <b>Funções Executivas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Orientar o estabelecimento de metas adequadas</li> <li>• Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias</li> <li>• Facilitar a gestão de informações e de recursos</li> <li>• Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso</li> </ul>
Meta	Alunos que são ....		
	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados

O Centro de Tecnologia Especial Aplicada (CAST) desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Design Universal para Aprendizagem (UDL), com o objetivo de focar na pesquisa, no desenvolvimento e na prática educacional e compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). O UDL inclui um conjunto de Princípios, articulados nas *Diretrizes e Pontos de Verificação*. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à instrução. [...]”

Assim, o UDL foca essas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e o projeto de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de compromisso. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos na recepção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. No entanto, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações / ideias e sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para nossas análises, vamos nos concentrar em particular nas diretrizes específicas dos três Princípios.

As diretrizes do Princípio 1 (fornecer vários meios de representação), sugerem propor diferentes opções de percepção e oferecer suporte para a decodificação de notações e símbolos matemáticos. Além disso, as diretrizes sugerem a importância de fornecer opções para padrões de destaque de compreensão, características críticas, grandes ideias e relações entre noções matemáticas. Finalmente, nossas análises darão exemplos de como o software AINuSet pode guiar o processamento, visualização e manipulação da informação, a fim de maximizar a transferência e generalização.

Além disso, as diretrizes do Princípio 2 (fornecer vários meios de ação e expressão) sugerem oferecer diferentes opções de expressão e comunicação para apoiar o planeamento e o desenvolvimento de estratégias. Finalmente, as diretrizes do Princípio 3 mostram como certas

atividades podem atrair o interesse dos alunos, otimizando a escolha individual e a autonomia e minimizando ameaças e distrações.

Na secção 4, analisaremos exemplos de atividades, classificando-as tanto pelo tipo de aprendizagem matemática para que são projetadas como pela área cognitiva que apoiam. Mostraremos como esses exemplos foram elaborados com base nos princípios do UDL, a fim de torná-los inclusivos e eficazes para superar as dificuldades matemáticas identificadas pelo questionário B2.

2) O Projeto Europeu **FasMed**, que incidiu sobre a avaliação formativa em matemática e ciências, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>)<sup>[1][2][3]</sup>

A avaliação formativa (AF) é concebida como um método de ensino onde "as evidências sobre o desempenho do aluno são obtidas, interpretadas e usadas por professores, alunos ou seus colegas para tomar decisões sobre as próximas etapas na instrução que provavelmente serão melhores, ou melhor fundamentadas, do que as decisões que teriam tomado na ausência das evidências que foram evidenciadas" (Black & Wiliam, 2009, p. 7). O projeto FaSMEd refere-se ao estudo de Wiliam e Thompson (2007), que identifica cinco estratégias-chave para as práticas de AF no ambiente escolar: (a) esclarecer e compartilhar intenções de aprendizagem e critérios para o sucesso; (b) desenvolver discussões eficazes em sala de aula e outras tarefas de aprendizagem que evidenciem a compreensão do aluno; (c) fornecer feedback que mova os alunos para a frente; (d) ativar os alunos como recursos instrucionais uns para os outros; (e) ativar os alunos como donos de sua própria aprendizagem. O professor, os colegas do aluno e o próprio aluno são os agentes que ativam essas estratégias de AF.

Tabela 4: Estratégias de avaliação formativa

	Para onde o aluno se está a direcionar	Onde o aluno está hoje	Como chegar lá
<b>Professor</b>	1 Esclarecer as intenções de aprendizagem e os critérios para o sucesso	2 Planejar discussões eficazes em sala de aula e outras tarefas de aprendizagem que evidenciem a compreensão do aluno	3 Fornecer feedback que movimenta os alunos para a frente
<b>Colega</b>	Compreender e compartilhar intenções de aprendizagem e critérios para o sucesso	4 Estimular alunos como recursos de aprendizagens de uns para os outros	
<b>Aluno</b>	Compreender as intenções de aprendizagem e os critérios para o sucesso	5 Estimular os alunos como donos da sua própria aprendizagem	

As atividades do FaSMEd são organizadas em sequências, que englobam trabalhos de grupo em fichas de trabalho e discussão em aula onde os trabalhos de grupo selecionados são discutidos por toda a turma, sob a orquestração do professor. Levando em consideração as estratégias de avaliação formativa e as funcionalidades da tecnologia, Cusi, Morselli & Sabena (2017, p. 758) desenvolveram três tipos de planilhas para a atividade em sala de aula:

“(1) *questionário de problemas*: fichas de trabalho que apresentam um problema e fazem uma ou mais perguntas envolvendo a interpretação ou a construção da representação (verbal, simbólica,

gráfica, tabular) da relação matemática entre duas variáveis (por exemplo, interpretando um gráfico de tempo-distância );

(2) *questionário de auxílio*, destinadas a apoiar os alunos que enfrentam dificuldades com os formulários de problemas, fazendo sugestões específicas (por exemplo, questões norteadoras);

(3) *questionário de votação*: fichas de trabalho solicitando uma votação entre as opções propostas ”.

Os autores identificaram estratégias de feedback (Tabela 5) que o professor pode adotar para dar feedback aos alunos (Cusi, Morselli & Sabena, 2018, p. 3466). Essas estratégias são empregadas na discussão em aula que é organizada pelo professor após o trabalho em grupo nas fichas.

Tabela 5:

Repetição	Quando o professor repete a intervenção de um aluno para chamar a atenção sobre a mesma. Frequentemente, durante a repetição, o professor enfatiza com a entoação de voz algumas palavras cruciais da frase. A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos.
Reformulação	A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos. A reformulação é aplicada quando o professor sente que a intervenção poderia ser útil, mas precisa ser comunicada de uma forma melhor para se tornar um recurso para os outros. [...] As estratégias de repetição e reformulação [...] fazem de um aluno (o autor da intervenção) um recurso para a aula.
Reformulação com apoio	Quando o professor, além de reformular, adiciona alguns elementos para orientar o trabalho dos alunos.
Recomeço	Quando o professor reage à intervenção de um aluno, que considera interessante para a turma, não dando um feedback direto, mas colocando uma questão relacionada. Desta forma, ao relançar o assunto, o professor fornece um feedback implícito [...] sobre a intervenção do aluno, sugerindo que a questão é interessante e vale a pena ser aprofundada ou, inversamente, tem alguns pontos problemáticos e deve ser reformulada.
Destaque	O destaque ocorre quando o professor chama a atenção para duas ou mais intervenções, representando duas posições distintas, de modo a promover uma comparação. Em contraposição, [...] os autores das duas posições podem ser recursos para a turma e também responsáveis pela sua aprendizagem.

A partir da experiência do FaSMEd, extraímos a ideia de criar atividades de sala de aula na perspectiva da avaliação formativa, que podem promover a inclusão.

### 3. Design

#### 3.1 Dificuldades identificadas através do questionário B2

Detetámos dificuldades no seguinte item de B2 (Q4A14):

Se  $x=2$ , complete as seguintes expressões:  $x^2 = \dots$

$2x = \dots$

$x^2 = \dots$



Essas dificuldades estão relacionadas com a construção do significado da variável, da expressão em função dessa variável e, em particular, da ação diferente que a posição dos números e das letras desempenha na expressão, ou seja, sobre o papel das letras e dos números na expressão.

### 3.2 Área cognitiva e domínio matemático de interesse

A área de dificuldades identificadas através do questionário B2 está relacionada ao domínio da Álgebra. Em particular, as dificuldades estão relacionadas com a construção do significado da variável, da expressão em função dessa variável e, em particular, da ação diferente que a posição dos números e das letras desempenha na expressão, ou seja, do papel da letra e números na expressão. Assim, área cognitiva envolvida é a visuo-espacial (Tabela 1).

Tabela 1: As dificuldades detetadas estão ligadas ao domínio cognitivo visuo-espacial e ao domínio da Álgebra.

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória			
Raciocínio			
Visuo-espacial			Se $x=2$ , complete as seguintes expressões: $x^2 = \dots$ $2x = \dots$ $x^2 = \dots$

### 3.3. Objetivos Educacionais

A ferramenta de intervenção tem como objetivo levar os alunos a uma compreensão dos papéis desempenhados pelas letras e números em Álgebra.

### 3.4. Destinatários

A ferramenta Intervenção articula-se num conjunto de atividades que devem ser realizadas com toda a turma, numa perspetiva de inclusão.

### 3.5 Atividades educacionais: a ferramenta de intervenção

As sequências de ensino são concebidas para abordar dificuldades específicas de aprendizagem, dentro de uma perspectiva inclusiva. As atividades são, em primeiro lugar, pensadas para criar empatia com os alunos quanto às suas dificuldades na abordagem da álgebra. De acordo com Villani (2014), também há uma contribuição fisiológica para os alunos na transição para a álgebra. A maioria dos professores e livros afirmam que: “Em Álgebra agimos com letras como agimos com números”, mas é mesmo verdade? A partir dessa reflexão, podemos tentar compartilhar com os alunos as dúvidas emergentes relacionadas com o exercício proposto, analisando o aspecto semântico por trás das três expressões dadas. Em seguida, para esclarecer num quadro visuo-espacial o significado e, portanto, as semelhanças e diferenças dos cálculos com coeficientes e variáveis, são também utilizadas ferramentas TIC, em particular Geogebra, um software de Geometria Dinâmica.

### Reflexões sobre a abordagem da álgebra.

O primeiro passo é então compartilhar com os alunos as suas dificuldades em abordar a álgebra. Podemos abrir uma discussão entre a turma em torno da afirmação: “Na Álgebra agimos com letras como agimos com números”. Poderíamos adotar a metodologia do debate: dividimos a turma em dois lados. Naturalmente, um irá argumentar a favor e outro contra a resolução declarada. A melhor escolha para fazer a metodologia funcionar é dividir a turma em



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

quatro grupos e atribuir dois grupos a cada uma das duas resoluções. Designa-se quais grupos serão os positivos, ou seja, a favor da afirmação. Os outros dois grupos serão os negativos e argumentarão contra as resoluções. Durante o debate, os outros grupos servirão como juizes e decidirão qual lado apresentou um caso mais forte votando nos vencedores do debate na conclusão.

O professor atua apenas como um supervisor, acompanhando o andamento das diferentes fases do debate, dando aos alunos instruções adicionais sobre o vocabulário específico que pode estar envolvido e exemplos para usar na realização de sua tese. Por exemplo, podemos dar as seguintes expressões:  $\frac{a+b}{a} = \frac{a+b}{a} = b$ ;  $\frac{a}{ab} = \frac{a}{ab} = \frac{0}{b} = 0$ ;  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  pedindo aos alunos que debatam por que estes são os erros mais comuns cometidos por alunos no mundo!

Também podemos usar as mesmas expressões, mas usando números, pedindo aos alunos que realizem as operações para fazer uma comparação entre a aritmética e a álgebra.

Com esta primeira atividade, também usando notas escritas do debate, podemos experimentar as cinco estratégias de feedback do FeSMEd lembradas na Tabela 5.

Podemos, em particular, anotar os diferentes termos usados pelos alunos, enfatizando o significado e o papel das letras e números numa expressão, por exemplo, a diferença entre variável e valor desconhecido entre letras e entre coeficiente e expoente entre números. Além disso, podemos discutir a diferença entre um resultado em aritmética e em álgebra. Em particular, é possível que entre os argumentos contra a afirmação de que na álgebra agimos como na aritmética, alguns alunos notaram que na álgebra frequentemente obtemos um resultado que é uma expressão algébrica adicional, enquanto entre as operações com números obtemos apenas um número e que esta é uma das motivações de vários erros em álgebra, tais como exemplos dados acima.

Esses erros são muito comuns entre os alunos, uma vez que são psicologicamente compelidos a chegar apenas a uma letra como resultado de números. Se as mesmas expressões forem escritas com números, os alunos fariam o cálculo corretamente, pois com os números eles são capazes de controlar semanticamente o procedimento enquanto com as letras esse controle é perdido, todas as certezas para algo de familiar e concreto são perdidas.

Este tipo de aprofundamento, mesmo usando expressões diferentes em relação à que temos que resolver, tem por objetivo fazer os alunos pensarem nas diferenças e semelhanças entre álgebra e aritmética estimulando-os a respeitar o fato de que é de alguma forma normal estar confuso inicialmente na passagem de cálculo com números para cálculo com letras.

### **Primeiro passo: interpretação matemática das expressões dadas**

Como primeira abordagem de forma a melhor compreender os diferentes significados das expressões, propomos abrir uma discussão em aula sobre o significado da operação a realizar.

Esta atividade será realizada com números inteiros positivos.

Os alunos serão convidados a redigir uma definição com as suas próprias palavras, e seguidamente o professor recolherá as fichas e apenas irá moderar a discussão, de acordo com os 5 princípios constantes na tabela 5.

Esperemos chegar a uma definição partilhada e correta da multiplicação como uma forma diferente de fazer uma adição, uma forma mais compacta de escrever uma adição, ou seja, para números inteiros positivos, a multiplicação consiste em adicionar um número (o multiplicando) a si mesmo, um número especificado de vezes dado por outro número (o multiplicador). O resultado é denominado produto.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Podemos começar com  $x^2$  quando  $x = 3$  em vez de 2, sendo  $x = 2$  como um caso especial no final do procedimento. Devemos também especificar que  $x^2$ , por sua vez, é uma forma compacta de escrever uma multiplicação do número por si só.

Então  $x^2 = 3^2 = 3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 = 9$  enquanto  $2x = 2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$ .

Em seguida, pedimos aos alunos que repitam o procedimento com diferentes valores de  $x$  para se convencerem da diferença entre as duas operações, mesmo que ambas possam ser relacionadas com uma soma, ou seja, podemos começar a olhar para o papel diferente desempenhado por 2 de acordo com sua posição em relação à letra da expressão.

Usando esta estratégia, podemos explorar profundamente o real significado das duas expressões. Recordando então o princípio comutativo para a adição, podemos mostrar que  $x^2 = 2x$  e então eles dão o mesmo resultado, tentando novamente com números específicos no lugar de  $x$ .

Depois disso, podemos então focar-nos no facto de que no caso de  $x = 2$ , os resultados iguais (4) das diferentes operações são apenas um mero acidente e que normalmente as duas expressões significam operações diferentes a serem realizadas e, em geral, os resultados são então diferentes.

### Enquadramento visuo-espacial: o ponto de vista geométrico

Após esta etapa preliminar realizada para se familiarizar com o problema a resolver, podemos mudar para o núcleo da atividade de aula envolvendo a abordagem visuoespacial e o ponto de vista geométrico, em particular, para levar a atividade anterior para uma área concreta específica de interesse.

Usando Geogebra desenhamos um segmento de comprimento 2 que chamamos de  $x$ . Então podemos construir um quadrado do lado  $x = 2$  para ter uma representação geométrica da expressão  $x^2 = 2^2 = 4$  como área do quadrado (Fig. 1).

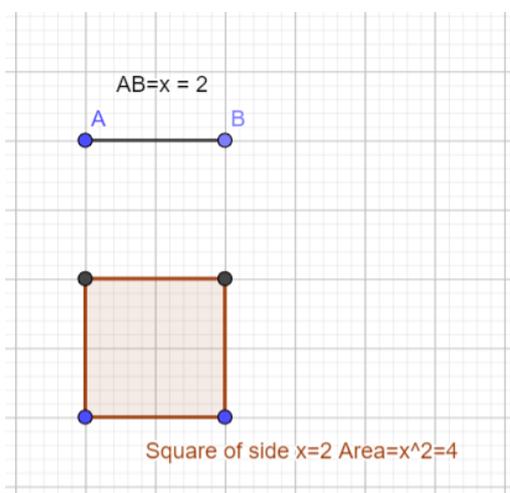
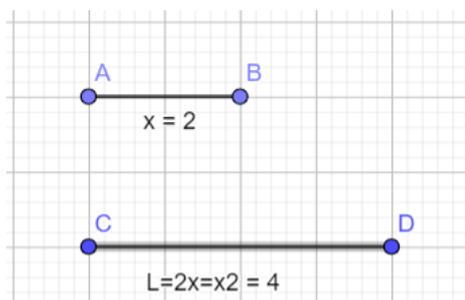


Fig. 1 Construção de um quadrado de lado 2 a partir de um segmento  $x=2$ (Geogebra)

Depois disso, podemos pedir ao aluno que represente  $x^2$  e  $2x$  em seus cadernos. Dependendo de suas respostas, uma discussão é aberta.

Também podemos fazer isso pelo software Geogebra (Fig.2).



**Fig. 2** Construção de um segmento que possui o dobro do comprimento do segmento AB (Geogebra)

Se estiver claro para os alunos que  $x^2$  é o mesmo de  $2x$  e que é diferente de  $x^2$  eles desenharão corretamente um segmento de comprimento duplo em comparação a  $x$ , podemos pedir-lhes que expliquem um ao outro, o papel diferente desempenhado pelo número 2 se colocado como expoente ou como fator.

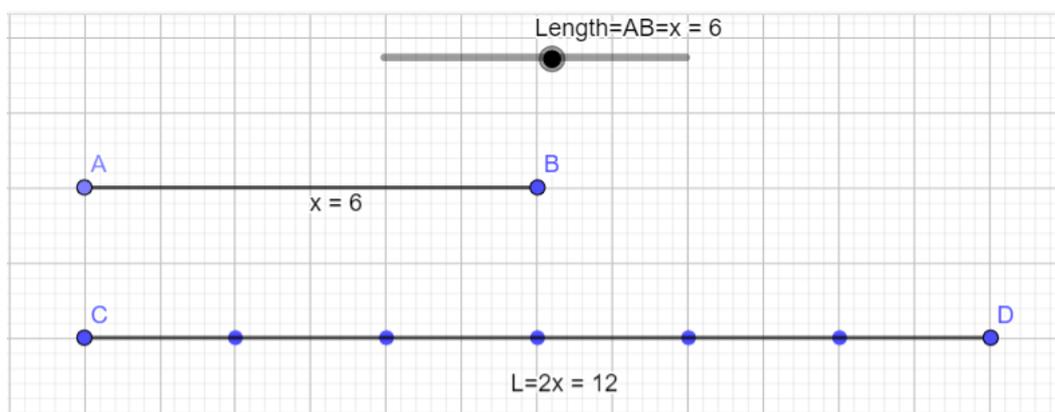
Mesmo que no caso de  $x = 2$  o resultado matemático seja o mesmo, usando a representação visual dos elementos geométricos, será evidente à primeira vista que no primeiro caso obtemos a área de um polígono (quadrado), enquanto no último será ainda um segmento.

Esta consideração será obviamente enfatizada, especialmente no caso de uma resposta errada dos alunos.

Podemos também fazer uma reflexão sobre as unidades de medida e as dimensões das grandezas envolvidas, lembrando também conceitos físicos básicos relacionados às medidas.

Podemos então colocar o foco no que acontecerá se alterarmos o comprimento do segmento, por exemplo, definindo 3 para o valor de  $x$ . Isso poderia ser feito facilmente no Geogebra definindo  $x$  como uma variável e, dessa forma, podemos discutir o conceito de variável, o papel das letras em jogo nas diferentes expressões usadas e enfatizar o poder da álgebra versus aritmética.

Isso é conseguido deslizando o valor do comprimento do segmento associado com  $x$  e a alteração correspondente no resultado de  $2x$  como mostrado na fig 2b (durante a animação os alunos podem seguir o ponto de rastreamento).



**Fig. 2b** Construção de um segmento que tem o dobro do comprimento de AB, deslizando a variável  $x$  (Geogebra)

### Representação da relação entre variável e expressão dependendo dessa variável num plano cartesiano e numa tabela

Os próprios alunos serão então convidados a tentar dar uma definição a fim de chegar ao significado de variável versus parâmetro.

Isso poderia ser feito novamente por uma abordagem visual, seguindo as duas funções  $y = 2x$  e  $y = x^2$ . Inicialmente, podemos pedir que eles tracem por pontos o gráfico das duas funções no seu próprio caderno, e então podemos fazer isso com o Geogebra.

Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Consideramos uma tabela definindo a relação entre a variável “x” e a expressão  $2x$ .

x	$2x$	$x^2$
0		
1		
2		
3		

O professor pede aos alunos que calculem o valor da expressão  $2x$  a partir dos valores da variável independente “x”

x	$2x$	$x^2$
0	$2 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
1	$2 \cdot 1 = 2$	$1 \cdot 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 2 = 4$
3	$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 3 = 9$

O professor pede aos alunos que desenhem a relação no plano cartesiano:

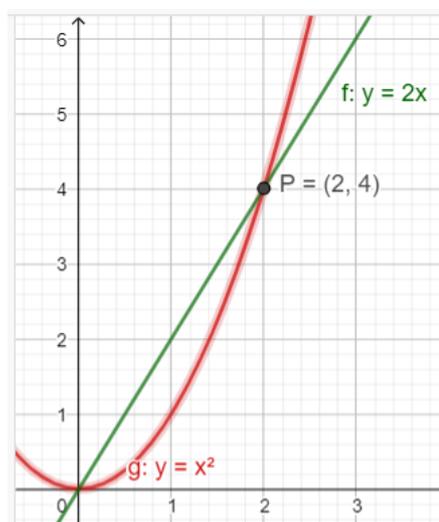


Fig. 3 Gráficos (Geogebra)

O professor orienta a discussão sobre a relação entre  $x$  e as expressões  $2x$  e  $x^2$  ambas através da representação geométrica (no plano cartesiano) e a relação algébrica para que os alunos consigam passar de um código para outro (processo de transcodificação). Nesta fase, também podemos pedir aos alunos que se concentrem no ponto de interseção para observar quando ocorre.

Posteriormente podemos rastrear  $y = kx$  variando o valor de  $k$  no Geogebra e abrindo a discussão sobre o papel que  $k$  desempenha em comparação com  $x$ .

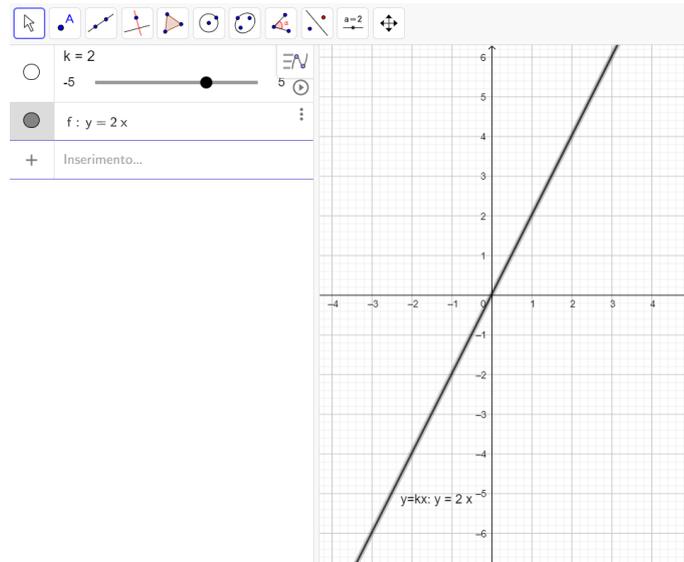


Fig. 4 Gráfico obtido com o Geogebra

O professor pode perguntar: “O que vocês acham que acontecerá com a mudança de  $k$  no gráfico?”

Após uma discussão e algumas tentativas feitas pelos alunos nos seus cadernos, usando tabelas e plotando por pontos os seus resultados, o professor mostrará o que acontece mudando o valor de  $k$  movendo o ponto na linha de  $k$  no Geogebra (Fig. 5)

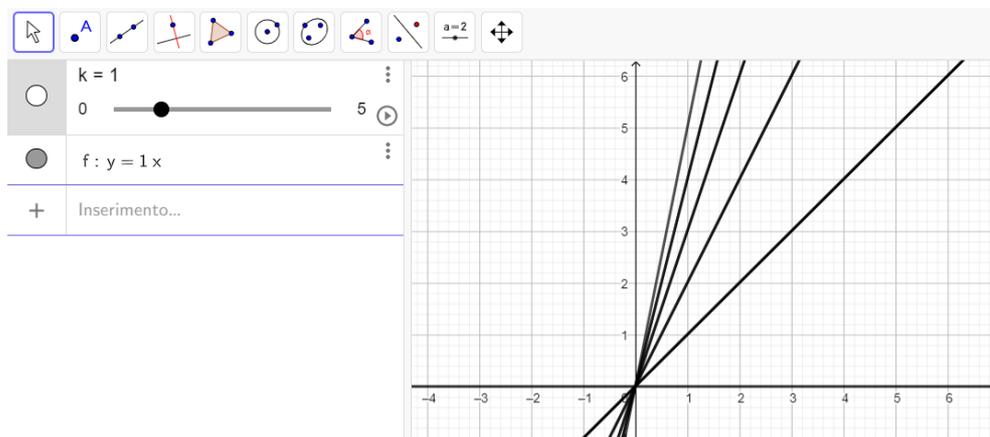


Fig. 5 Gráficos Geogebra obtido fazendo variar  $k$ .

“Como vocês interpretam o que acontece com a expressão algébrica  $2x$ ,  $3x$  e assim por diante?”.

Podemos pedir aos alunos que voltem à ficha envolvendo segmentos para apontar como  $k$  afeta o resultado e que tipo de relação matemática existe entre o comprimento final obtido multiplicando  $x$  por 2, 3 etc.

Um debate final e mais aprofundado poderia ser aberto com o objetivo de dar sentido às letras nas expressões, apesar do facto de serem frequentemente utilizadas letras iguais, propondo-se discutir os diferentes significados de  $x$  nas duas seguintes expressões: comprimento =  $2x$  e  $2x = 4$ ,



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

identificando no primeiro  $x$  como uma variável (por exemplo, o comprimento dos diferentes segmentos a serem duplicados) e no segundo  $x$  como um valor desconhecido, gostaríamos de determinar para saber qual o comprimento que deve ser associado a um segmento para fazer o seu duplo sendo 4 e assim por diante (ou qualquer quantidade associada a  $x$ ).

De referir que as abordagens descritas propõem diferentes representações (UDL Princípio 1) e são pensadas para atuar como mediadoras dos conceitos algébricos de variável, expressão dependente e do papel dos números nelas (números como fatores ou expoentes) através de um modelo dinâmico variando do ponto de vista matemático ao geométrico e ao gráfico. (Princípio 2 do UDL). A mediação pode ocorrer graças ao canal visual e ao uso de meios verbais visuais (linguagem escrita). A construção do conceito assim realizada pode permitir que os alunos, e principalmente os alunos com MLD, encontrem referências experienciais adequadas ao seu estilo cognitivo, proporcionando múltiplos meios de envolvimento (Princípio 3 da UDL).

Isso levá-los-á a recuperar essa abordagem nas suas memórias cada vez que se depararem com uma expressão algébrica envolvendo situações semelhantes, tornando-os mais confiantes para o sucesso.

Em termos de avaliação formativa, o nosso design ativa a estratégia 2 (discussões em sala de aula de engenharia). Durante a discussão, são experimentadas as estratégias 5 e 4, uma vez que os alunos podem expressar suas dúvidas tornando-se donos de sua própria aprendizagem ou dar explicações aos seus colegas tornando-se recursos para os colegas. O professor e os colegas podem fornecer feedback a um aluno, ativando a estratégia 3.

#### 4. Discussão através das diretrizes do UDL sobre as atividades anteriores

Observamos que o mesmo objetivo educacional de construir uma compreensão dos vários papéis desempenhados por letras e números na Álgebra é abordado de maneiras diferentes, agindo de acordo com os três princípios do UDL (Tabela 7, em vermelho os nossos comentários para ilustrar a conexão entre os princípios e nossas atividades).

Tabela 7: Análise das atividades através da tabela dos princípios da UDL.

<b>Compromisso</b>	<b>Representação</b>	<b>Ação &amp; Expressão</b>
<b>Recrutamento de interesse</b>  Otimiza a escolha individual e a autonomia  Otimiza a relevância, o valor e a autenticidade  Minimiza ameaças e distrações	<b>Percepção</b>  Fornecer maneiras de personalizar a exibição de informações  Oferece alternativas para ouvir informações  Oferece alternativas para informações visuais  Diferentes registos através dos quais as informações são exibidas (visual; visual-dinâmico; simbólico)	<b>Ação física</b>  Vários métodos de resposta e navegação  Otimize o acesso a ferramentas e tecnologias
<b>Sustentação do esforço, Persistência</b>  Aumenta a relevância das metas e objetivos  Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio  Promova a colaboração e a comunidade	<b>Linguagem &amp; Símbolos</b>  Esclarece o vocabulário e os símbolos  Esclareça a sintaxe e a estrutura  Oferecer linguagem e símbolos alternativos para descodificar informações e trabalhar com as informações	<b>Expressão comunicação</b>  Usa vários meios de comunicação  Usa várias ferramentas para construção e composição  Desenvolve fluências com níveis de suporte qualificados para prática e desempenho



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

<p>Aumenta o feedback orientado para o domínio</p> <p>Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio</p> <p>Promove a colaboração e a comunidade</p> <p>Os feedbacks orientados apoiam o compromisso e a motivação no que diz respeito à elaboração da solução da tarefa</p>	<p>Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos</p> <p><i>Isto é promovido pela ação dinâmica devido ao uso do software Dynamic Geometry.</i></p> <p>Promove a compreensão em vários idiomas</p> <p>Ilustrar através de múltiplas medias</p> <p><i>Isso é promovido pelas atividades de transcodificação entre diferentes registros de representação</i></p> <p>Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos</p> <p><i>Isso é promovido pela visualização de diferentes registros (por exemplo, interpretação geométrica e visualização, relações entre operações matemáticas e diferentes papéis desempenhados pelos mesmos números e letras; uma variável como um ponto móvel rotulado por x que é um comprimento)</i></p>	<p>Usa diferentes registros para se comunicar</p> <p><i>Nas atividades são fornecidos manipuladores matemáticos. Por exemplo, arrastar um ponto móvel pode ajudar a visualizar que o parâmetro pode ter valores diferentes que afetam o gráfico no gráfico ou a variável pode ter valores diferentes que afetam o resultado correspondente da expressão.</i></p>
<p><b>Auto Regulação</b></p> <p>Promove expectativas e crenças que otimizam a motivação</p> <p>Facilita as habilidades e estratégias pessoais de reflexão</p> <p>Desenvolve autoavaliação e reflexão</p> <p><i>As estratégias de avaliação formativa, conforme discutidas na secção 2, podem ajudar na autoavaliação e na reflexão. Mais especificamente, o professor pode fornecer diferentes tipos de feedback</i></p>	<p><b>Compreensão</b></p> <p>Ativa ou fornecer conhecimento prévio</p> <p>Destaque padrões, recursos críticos, grandes ideias e relacionamentos (ponto de verificação 3.2)</p> <p>Guia de processamento e visualização de informações</p> <p>Maximize a transferência e generalização</p> <p>Percepção, linguagem e símbolos, compreensão (Construir conhecimento utilizável, conhecimento que é acessível para futuras tomadas de decisão, depende não meramente de perceber informações, mas de "habilidades de processamento de informações" ativas)</p>	<p><b>Funções Executivas</b></p> <p><i>Orientar o estabelecimento de metas adequadas</i></p> <p><i>O uso de artefatos também pode ser um suporte para a memória. Os artefatos guiam o processo de investigação dos alunos, fornecendo feedback sobre o processo. (por exemplo, através da visualização geométrica das expressões algébricas)</i></p> <p><i>Apoio ao planeamento e desenvolvimento de estratégia</i></p> <p><i>Facilita a gestão de informações e recursos</i></p>

Isso permite que os alunos construam significado para as noções algébricas abordadas.

## 5. Referências





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

[1] Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.

[2] Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. *ZDM Mathematics Education*.

[3] Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2018). Enhancing formative assessment in mathematical class discussion: a matter of feedback. *Proceedings of CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01949286, pp. 3460-3467.

[4] Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.

[5] Robotti E., Baccaglini-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In *Innovation & Technology. Series Mathematics Education in the Digital Era*, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.

[6] Villani V., Berni M. (2014). *Cominciamo da zero*, Pitagora Editrice Bologna.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.