Project number: 2018-1IT02KA201048274

Rozdział 2

Analiza trudności w uczeniu się matematyki

Opracowano w ramach projektu europejskiego

SMiLD

Numer projektu: 2018-1-IT02-KA201-048274

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Project number: 2018-1IT02KA201048274

Spis treści

Wstęp 3

2.1 Charakterystyka TNM poprzez ich przejawy i możliwą identyfikację 3

2.2 Jakie działania należy podjąć w praktyce dydaktycznej w odniesieniu do Trudności w uczeniu się matematyki? 5

2.3 Analiza języka używanego w podręcznikach do matematyki w celu wykazania związku między językiem a trudnościami uczniów; określenie, jakie strategie językowe są lub mogą być stosowane celem lepszego zrozumienia pojęć i lepszego podejścia do rozwiązywania problemów. 8

Bibliografia 10

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Wstęp

Dyskomfort w klasie i trudności w nauce są przejawami związanymi przeważnie z czynnikami ryzyka, które mogą mieć podłoże fizyczne lub społeczno-kulturowe i którymi należy zająć się za pomocą teoretycznie ugruntowanego i odpowiednio opracowanego modelu interwencji opartego na dowodach empirycznych celem uniknięcia niepowodzeń szkolnych. Różne czynniki ryzyka i ich skutki można przypisać pewnym czynnikom o dużej skali. Według wielu międzynarodowych badań wpływ pochodzenia społeczno-kulturowego uwidacznia się przede wszystkim w wynikach szkolnych, co generuje znaczne opóźnienia i dystans w rozwoju poznawczym obecny już od pierwszych lat życia. W kategorii uczniów określanych jako „niskie osiągnięcia" (NO) skutki deficytów są bardziej widoczne na polu językowym, ale istotne braki występują także w matematyce. Uczniowie osiągający niskie wyniki, czyli ci, którzy osiągnęli poziom poniżej średniej klasy, przejawiają częste trudności w operacjach związanych z procesem pamięciowym, podczas rozwiązywania problemów wymagających strategii obliczeniowych - efekt deficytu rozpoznawania faktów. Ograniczenia w rozwiązywaniu problemów są często powiązane z trudnościami w czytaniu i rozumieniu tekstów, deficytach w formułowaniu hipotez, w procesach logicznych, w stosowaniu i adaptacji zasad matematycznych oraz innych różnych poznawczych podtypach trudności w uczeniu się matematyki (TUM), które zostały sklasyfikowane za pomocą podejścia opartego na danych liczbowych. Również braki motywacyjne zmniejszają determinację uczniów w pokonywaniu przeszkód poznawczych, jakie stwarzają złożone treści matematyczne. Aby odpowiednio poradzić sobie z trudnościami, konieczne jest zaproponowanie metod uwzględniających złożoność czynników generujących problemy w nauce, różnorodność ich skutków i szybkość, z jaką powstają różnice w umiejętnościach, tak aby wskazać cel i czynniki ochronne. Ważne jest, by wczesne diagnozy były adekwatne do identyfikacji specyficznych problemów w uczeniu się i aktywizacji procesów poznawczych uczniów (takich jak postrzeganie, rozpoznawanie, poczęcie i rozumowanie), które nie są odpowiednio stymulowane w odniesieniu do podstawowych treści w zintegrowanym kontekście uczenia się matematyki i języka, który motywuje uczniów do osiągnięcia sukcesu.

Niskie wyniki w matematyce nawet dla tych, którzy prezentują przeciętne umiejętności czytania i pisania, mają bezpośredni wpływ na codzienne życie, skutkując mniejszymi możliwościami pracy i niższymi zarobkami, co udokumentowano w analizach przeprowadzonych w Wielkiej Brytanii i USA. Dlatego znaczenie systemu edukacyjnego ma fundamentalne znaczenie dla radzenia sobie z deficytami w celu przygotowania młodych ludzi do wykonywania, zgodnie z własnymi możliwościami i wyborami, aktywnościami lub funkcjami, które przyczyniają się do materialnego lub duchowego postępu społeczeństwa.

2.1 Charakterystyka TNM poprzez ich przejawy i możliwą identyfikację

Podstawy neurobiologiczne mogą być przyczyną niepełnosprawności matematycznej, która jest uważana za zaburzenie neurorozwojowe, ale niepełnosprawność matematyczna może być również konsekwencją czynników zewnętrznych. Dowód na to, jak środowisko społecznego wpływa na organizm ludzki, był podany w starożytności i określony jako tak zwane zaburzenie deprywacji afektywnej, którego skutki od lat 70. XX wieku Lytt Gardner badała w dziecięcej karłowatości lub psychospołecznym niskim wzroście PNW). Epigenetyka, będąca młodą dyscypliną, poprzez naukowe dowody wskazuje, jak czynniki społeczno-kulturowe wpływają na organizm i jego funkcjonowanie, powodując dziedziczne zmiany fenotypowe, modyfikując aktywację niektórych genów, bez zmian w sekwencji DNA. Ponieważ doświadczenia środowiskowe modulują poziomy i charakter sygnałów epigenetycznych, uważa się je za fundamentalne w pośredniczeniu w zdolności środowiska do regulowania genomu. Epigenetyka odgrywa fundamentalną rolę we wszystkich procesach reorganizacji i restrukturyzacji neuronów, w tym także tych, które kierują plastycznością mózgu. Kluczowe zmiany epigenetyczne są również zaangażowane w regulację procesów uczenia się i pamięci, wzbogacenie środowiska jest również zdolne do leczenia deficytów uczenia się i pamięci. Istnieje wiele teorii w tej kwestii:

- Hipoteza deficytu rdzenia,

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- Deficyty w ogólnej hipotezie dziedzinowej,
- Braki w dziedzinach matematycznych specyficznych dla danej dziedziny,
- Hipoteza deficytu proceduralnego

Teorie te opierają się na dysfunkcji w określonych obszarach mózgu związanych głównie z procesami matematycznymi. Ponadto badania z zakresu psychologii wychowawczej i edukacji ogólnej wspierają hipotezę filtra afektywnego, która jest pojęciem odnoszącym się do teorii uczenia się drugiego języka i dotyczy trudności w uczeniu się wywołanych negatywnymi reakcjami emocjonalnymi na własne środowisko. Niektóre uczucia, takie jak strach, niepokój i nuda, zakłócają proces uczenia się zgodnie z hipotezą filtra afektywnego. Te negatywne emocje działają jak filtr między mówcą a słuchaczem, zmniejszając ilość informacji, które słuchacz może zrozumieć, uniemożliwiając w ten sposób efektywne ich przetwarzanie.

Terminy używane do opisania uczniów mających problemy z matematyką różnią się w zakresie studiów i przepisów w zależności od definicji samych grup docelowych oraz od zastosowanych instrumentów badawczych i polityki zwalczania. Szeroko stosowana definicja trudności w nauce matematycznej (TNM) obejmuje szeroką gamę deficytów, głównie dotyczących obszaru arytmetyki, a tym samym rozwiązywania problemów arytmetycznych: ogólnie mówiąc, TNM jest używane w odniesieniu do trudności w uczeniu się we wszystkich dziedzinach matematyki. Trudności matematyczne doświadczane przez dzieci zależą od różnych czynników, od złego nauczania po środowisko społeczno-kulturowe, o szerszym znaczeniu niż definicja niepełnosprawności matematycznej (NM). Nie wszyscy uczniowie z trudnościami matematycznymi będą posiadać NM, której hipotetyczny paradygmat odnosi się do wrodzonej dysfunkcji poznania matematycznego, niezależnej od przyczyn społeczno-kulturowych i środowiskowych. dlatego z braku standardów potwierdzających występowanie trudności w nauce (TN) matematyki , w obrębie środków dydaktycznych należy uwzględnić różnice w kryteriach diagnostycznych i różne wizje systemów edukacyjnych i medycznych odpowiedzialnych za opiekę nad tymi uczniami.

The socio-cultural environment in which the students and the teachers are inserted, strongly influences the learning achievements, because a diagnosis of a disease instead of a difficulty depends on the respective official definition, thus radically changing the tackling perspective and testing procedures and reflects on the effectiveness of the efforts to improve the quality of the teaching/learning process. It is important, therefore for us to understand that the context influences both groups of the students and the teachers, so first of all we should identify the environment where teachers use terms like dyscalculia rather than poor math achievement to address children. The issue of a definition is still in progress, in Italy and most western countries the specificity of MLD diagnosis is included in a general category of 'Specific Learning Disabilities' (SLD)

Środowisko społeczno-kulturowe, w którym znajdują się uczniowie i nauczyciele, silnie wpływa na osiągnięcia w nauce, skoro diagnoza choroby zależy nie tyle od trudności, lecz od odpowiedniej oficjalnej definicji, radykalnie zmienia perspektywę walki i procedury testowania oraz rozważań nad skutecznością wysiłków na rzecz poprawy jakości procesu nauczania / uczenia się. Dlatego ważne jest rozumieć, iż kontekst wpływa zarówno na grupy uczniów, jak i nauczycieli, z tego względu w pierwszym kroku należy zidentyfikować środowisko, w którym nauczyciele używają terminów takich, jak dyskalkulia, które jest znacznie lepsze niż "niskie osiągnięcia matematyczne" w odniesieniu do dzieci. Kwestia definicji jest nadal w toku, we Włoszech i większości krajów zachodnich specyfika diagnozy TNM jest zawarta w ogólnej kategorii Specyficzne trudności w uczeniu się (STU) wraz ze wszystkimi trudnościami w uczeniu się, uczniowie są zatem traktowani jako osoby ze „specjalnymi potrzebami edukacyjnymi" (SPN).

Światowa Organizacja Zdrowia w Międzynarodowej statystycznej klasyfikacji chorób i powiązanych problemów zdrowotnych (International Statistical Classification of Diseases and Related Health Problems) 10. edycji (IChD-10) wdraża klasyfikację o nazwie „F81.2 Specyficzne zaburzenie w zakresie umiejętności arytmetycznych" , które „wiąże się z określonym upośledzeniem umiejętności arytmetycznych, którego nie można wytłumaczyć wyłącznie ogólnym upośledzeniem umysłowym lub rażąco nieodpowiednim wykształceniem". Testy diagnostyczne, takie jak IChD 10 (WHO, 2003) lub DSM 5 (2013), mają na celu zidentyfikowanie osób z zaburzeniami matematyki lub trudnościami w uczeniu się matematycznym jako mających określone trudności

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

w uczeniu się lub uczeniu się matematyki w oparciu o modele medyczne. Inne podejścia badawczo-wyjaśniające, takie jak europejska społeczność edukacyjna, wykorzystują szerszą koncepcję uczniów z matematycznymi trudnościami w uczeniu się, odnosząc się do dowolnej grupy uczniów z niskimi osiągnięciami w matematyce (2013): „Niskie osiągnięcia to sytuacja, w której dziecko nie nabywa podstawowych umiejętności, podczas gdy nie mażadnej zidentyfikowanej niepełnosprawności a zdolności poznawcze obecne są w normalnym zakresie. W takich przypadkach niskie wyniki mogą być traktowane jako porażka systemu edukacji ”.

„Deficyt dotyczy opanowania podstawowych umiejętności obliczeniowych dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia (a nie bardziej abstrakcyjnych umiejętności matematycznych związanych z algebrą, trygonometrią, geometrią czy rachunkiem różniczkowym)”. Jednocześnie wytyczne diagnostyczne ukazują, że „zaburzenia arytmetyczne badano rzadziej niż zaburzenia czytania, a wiedza na temat przebiegu, korelacji i wyników jest dość ograniczona”. Będziemy używać TNM w odniesieniu do matematycznych trudności w uczeniu się we wszystkich dziedzinach, co należy uznać za wielowymiarowe, tym samym wprowadza się obraz domeny matematycznej inne niż wymienione powyżej. Na przykład związane z pamięcią (procesem zapamiętywania), takie jak hamowanie wprowadzania nieistotnych informacji do pamięci roboczej; mechanizmy wykonawcze związane z rozumowaniem, takie jak zakaz; hamowanie (filtr afektywny); aktualizowanie odpowiednich informacji, przechodzenie od jednej strategii operacyjnej do innej, aktualizacja i planowanie strategiczne, podejmowanie decyzji, pamięć semantyczna; wizualno-przestrzenna pamięć robocza i rozumowanie / percepcja wzrokowo-przestrzenna.

2.2 Jakie działania należy podjąć w praktyce dydaktycznej w odniesieniu do Trudności w uczeniu się matematyki?

Powszechnie uważa się, w szczególności w środowisku nauczycieli przedmiotów ścisłych, w tym także matematycznych, iż wiele trudności ze zrozumieniem i uczeniem się uczniów zależy od czynników językowych.

Zapamiętywanie reguł na pamięć nie wystarczy jednak w obliczu problemu, bo choć uczniowie pamiętają reguły, to czasami nie potrafią rozpoznać pytania, zinterpretować instrukcji, zidentyfikować elementy niezbędne do rozwiązania itp.

Czasami nauczyciele skarżą się na trudności dzieci w wyrażaniu się: poprawianie zadań domowych z matematyki często wymaga interpretacji i integracji niepowiązanych i niepoprawnych językowo tekstów. Językowy lub tekstowy błąd organizacyjny w zadaniu matematycznym należy traktować jako poważny. Narzędzia potrzebne nauczycielom dyscyplin naukowych muszą być skuteczne, aby rozwiązywać trudności językowe uważanie za jedno ze źródeł trudności w matematyce.

W nauce matematyki komponent komunikacyjny jest kluczowy, by właściwie wyrażać i przekazywać wiedzę, umiejętności, postawy i doświadczenia, które są nieustannie opracowywane i przeplatane ze sobą; ścieżka uczenia się jest zatem wynikiem pracy, w której język łączy różne komponenty współdziałające ze sobą.

Martha Fandiño analizuje aspekty procesu uczenia się z innego punktu widzenia, koncentrując się na strategiach. Rozróżnia „uczenie się konceptualne”, „uczenie się proceduralne lub algorytmiczne”, „uczenie się semiotyczne lub zarządzanie reprezentacjami”, „uczenie się strategiczne” i wreszcie „uczenie się komunikatywne” , które mają decydujący wpływ w końcowej fazie procesu uczenia się, kiedy zachodzi zamiana w efektywną naukę i zrozumienie. Komunikatywne uczenie się matematyki jest aspektem edukacji, który dotyczy zdolności do wyrażania logicznych pomysłów, opowiadania, potwierdzania, uzasadniania, argumentowania, demonstrowania pojęć matematycznych (zarówno ustnie, jak i na piśmie) i wizualnego przedstawiania ich za pomocą liczb.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Najważniejsze międzynarodowe badanie w ramach umiejętności matematycznych, badanie OECD-PISA, podaje definicję „wyników w matematyce", która na potrzeby badania PISA mierzy umiejętności matematyczne 15-latka: „Umiejętność matematyczna to zdolność jednostki do rozumowania matematycznego oraz formułowania, wykorzystywania i interpretowania matematyki w celu rozwiązywaniu problemów w różnych kontekstach świata rzeczywistego. Obejmuje koncepcje, procedury, fakty i narzędzia do opisywania, wyjaśniania i przewidywania zjawisk. Pomaga jednostkom poznać rolę, jaką matematyka odgrywa na świecie, i wydawać uzasadnione sądy oraz podejmować decyzje potrzebne konstruktywnym, zaangażowanym i refleksyjnym obywatelom XXI wieku ". Dla przykładu studenci powinni umieć zarządzać trzema procesami matematycznymi:

- Matematyczne formułowanie sytuacji;
- Stosowanie pojęć matematycznych, faktów, procedur i rozumowania;
- Interpretacja, stosowanie i ocena wyników matematycznych.

Kompetencje językowe odgrywają fundamentalną rolę. Ramy odniesienia badania OECD-PISA wyjaśniają tę rolę i mogą być bardzo przydatnym narzędziem, także dla nauczycieli, do lepszego definiowania zjawisk i interpretacji zachowań uczniów.

W ramach badania OECD-PISA podkreśla się znaczenie kompetencji komunikacyjnych w trzech różnych aspektach procesów matematycznych - formułowaniu, użyciu oraz interpretowaniu. W procesie formułowania języka fundamentalne jest rozważenie czytania, dekodowania i interpretowania wypowiedzi, pytań, zadań w celu stworzenia mentalnego modelu sytuacji; w procesie użycia wyraźnie stwierdza się, że umiejętności językowe są niezbędne do wyartykułowania rozwiązania, zilustrowania pracy niezbędnej do dojścia do rozwiązania oraz podsumowania i zaprezentowania wyników pośrednich; wreszcie, w procesie interpretacji, potrzebujemy języka, aby opracować i przekazać wyjaśnienia i argumenty w kontekście problemu. Kompetencja argumentacyjna przejawia się również w trzech fazach cyklu rozwiązywania problemów (modelowania) - formułowania, wykorzystywania, interpretacji i oceny - w szczególności poprzez dostarczanie, wyjaśnianie i obronę uzasadnień modelowania matematycznego, ważnych dla nabycia kompetencji językowych.

W świetle powyższego oczywiste jest, iż konieczne wydaje się budowanie interdyscyplinarnego połączenia między pracą nauczyciela języka a pracą nauk ścisłych, zwłaszcza matematyki, we wszystkich klasach szkolnych.

Ponieważ trudność i niesprawność językowa faktycznie przeszkadza w rozumieniu treści problemu, w umiejętności identyfikacji instrukcji, możliwości znalezienia skutecznej strategii rozwiązania, w umiejętności kontroli poprawności wyniku, umiejętności uzasadnienia wybranej strategii oraz opracowania i uzasadnienia rozwiązania, należy wziąć pod uwagę strategie przeciwdziałania trudnościom językowym i niepełnosprawnościom, aby przeciwstawić się problemom związanym z rolą języka w nauce matematyki. Przede wszystkim językowy aspekt podręczników: winny być one wyważone, aby odzwierciedlały wiek i otoczenie społeczne uczniów, ponadto należy wziąć pod uwagę wykorzystanie innych technik komunikacyjnych, takich jak obrazy i inne strategie nauczania, na z jednej strony przeciwdziałanie trudnościom w uczeniu się, z drugiej wzmacnianie świadomości potencjału pracy nad tekstami matematycznymi w zakresie doskonalenia umiejętności językowych.

Wśród aspektów motywacyjnych, które powinny być brane pod uwagę w procesie uczenia się we wszystkich dyscyplinach, a zwłaszcza w matematyce, jest: regularność i harmonia, na przykład w formułach i figurach geometrycznych, które są aspektami związanymi z pojęciem piękna. Zdania takie jak „ładne twierdzenie", „niezły dowód" lub „niezła teoria" są powszechne wśród matematyków: dla twierdzenia „piękny" oznacza krótki i jasny, a w przypadku wyrazu „piękny" oznacza niezbyt krótki, ponieważ odnosi się do dobrze wyrażonego wyniku. Postępowanie harmoniczne i matematyczne są ściśle powiązane w sztuce i muzyce, co widać na przykład w złotym podziale i muzycznej skali harmonicznej, dzięki czemu uczniowie stają świadomi sposoby, w jaki charakterystyczne cechy „emocjonalnych" elementów matematycznych są wzmacniane i usystematyzowane w muzyce oraz, bardziej ogólnie w sztuce powinny być wdrażane w procesie uczenia się w

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

szkole. Mówiąc słowami Leibniza: „Muzyka jest ukrytym arytmetycznym ćwiczeniem umysłu, który nie wie, że liczy”.

Ponieważ style uczenia się mogą się różnić w zależności od ucznia, przykłady „z życia wzięte”, stymulujące różne czynności zmysłowe, są uważane za niezwykle przydatne w pokonywaniu trudności uczniów. Z matematycznymi elementami teorii muzyki związane są różne anegdoty, np. Pitagoras i jego uczniowie zauważyli, że wibrujące dwie struny poddane temu samemu napięciu, ale o różnej długości (odpowiednio 1/2, 2/3 i 3/4 pierwszej), dają szczególnie przyjemne dla ucha dźwięki (w rzeczywistości spółgłoski). Fizjologiczna struktura naszego słuchu sprawia, iż częstotliwości dźwięków postrzegamy w sposób multiplikatywny, a nie addytywny: w skrócie, uchem „liczymy” w postępie geometrycznym, a palcami, dodając jednostki do jednostek, liczymy zgodnie z postępem arytmetycznym. Skala jest zbudowana z częstotliwości podstawowej struny przyjętej jako jednostka i pomnożonej lub podzielonej przez 3/2. Postępując w ten sposób, rosnąco lub malejąco, mnożąc przez 3/2 lub 2/3, otrzymujemy proporcje tak zwanej skali pitagorejskiej (chociaż faktycznie pochodzi ona z Eratostenesa w III wieku pne). Na przykład, nuta emitowana przez strunę rozciągniętą przez poczwórną wagę ma podwójną częstotliwość: można powiedzieć, że jest o jedną oktawę od poprzedniej i będzie odbierana jako „równa”, ale ostrzejsza. Tę samą obserwację można powtórzyć w odniesieniu do długości: skracając strunę, a zwłaszcza dociskając ją do połowy jej długości, a następnie ściskając jedną z jej połówek, uzyskamy nutę na wyższej oktawie. W dzisiejszej klawiaturze fortepianu, pomiędzy dwoma sąsiadującymi klawiszami, czarnym lub białym, występuje interwał zwany „temperowanym półtonem”. Struny dowolnego wybranego półtonu są w tym samym stosunku. Skalę uzyskaną zgodnie z równomiernym temperamentem uzyskuje się zatem przez podzielenie oktawy na dwanaście równych części na skali logarytmicznej. Skoro oktawa reprezentowana jest przez stosunek 2:1, za pomocą łańcucha prostych proporcji otrzymujemy wartość najmniejszego interwału, zwanego umiarkowanym półtonem, równą dwunastemu pierwiastkowi z 2, który ma wartość około 1,06, zbliżoną do półtonu diatonicznego E-F, który ma wartość 256/243 = 1,053 i wartość tonu temperowanego, co odpowiada iloczynowi dwóch dwunastych pierwiastków z 2, równej 1,1224, a więc bliskiej wartości tonu skali diatonicznej, czyli 9/8 = 1,125. Jak wiemy dzisiaj, podstawowa częstotliwość (nuta) dźwięku emitowanego przez strunę w wibracji jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z napięcia, któremu poddana jest struna; jest odwrotnie proporcjonalna do swojej długości, pierwiastka kwadratowego z jej gęstości i przekroju. Rozwiązanie to w pewien sposób ocaliło współbrzmienie interwałów systemu pitagorejskiego i ujednoliciło stopnie gamy, dając kompozytorom i instrumentalistom znacznie większą swobodę i większą możliwość gry i komponowania, ale musiało korzystać z irracjonalnej koncepcji. odrzucony przez Pitagorasa, ponieważ zaprzeczał możliwości wyrażenia związku za pomocą liczb naturalnych. W XVIII wieku matematycy lepiej rozumieli naturę dźwięku i potrafili analitycznie opisać jego propagację. Francuski matematyk J.-B. J. Fourier doszedł do wniosku (opierając się na Danielu Bernoullim (1700-1782) uznającego, że za pomocą szeregu trygonometrycznego określa się rodzaj dźwięku), iż każdą funkcję okresową można wyrazić za pomocą szeregu trygonometrycznego. Elementy matematyczne obecne są w muzyce Arnolda Schönberga (1874-1951) i jego uczniów, zgodnie z atonalnością i dodekafonią, metodą kompozycyjną wykorzystującą dwanaście dźwięków skali chromatycznej wolnej od wzajemnych i hierarchicznych relacji harmonicznych i zreorganizowanej, nawet z wykorzystanie technik kombinacyjnych, zgodnie z zasadą szeregu. W XIX wieku, po podważeniu zasady współbrzmienia / dysonansu akordów muzycznych, mamy kilka przykładów zasad matematycznych wprowadzonych do muzyki za pomocą muzyki stochastycznej opartej na teorii łańcuchów Markowa, w 1955 roku Iannis Xenakis wprowadził do muzyki prawdopodobieństwo: kompozycja muzyczna jest przetwarzana formalnie procesy zdefiniowane w kategoriach probabilistycznych.

Wyobraźnia jest również niezbędnym elementem myślenia matematycznego. Wymaga ona kształcenia poprzez poprawną i precyzyjną interpretację języka i reguł, według których budowane są obiekty matematyczne. Można pomóc uczniowi w prawidłowej, wyobrażeniowej konstrukcji abstrakcyjnego pytania matematycznego, wybierając w historii matematyki paradygmat najbliższy jego modelom kulturowym i najbardziej odpowiedni do wychowania do myślenia strukturą (zbuduj model), które pozostaną spójne i funkcjonalne nawet w dalszej kontynuacji badania, gdy różne gałęzie, takie jak geometryczna i algebraiczna, będą się mieszać , dla przykładu w paradoksie Zenona z platońskiego dialogu Sokratesa: aby dogonić żółwia, Achilles powinien być w stanie podroczyć (przebiec) sumę nieskończonych odcinków łączących jego położenie z położeniem żółwia; jednak

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

suma nieskończonych odcinków niekoniecznie jest segmentem nieskończonym, jeśli mają one zerową długość. Oto paradoks, prawdopodobnie niespójny: realizując sumę prawie nieskończoności z odległości prawie zerowej, odpowiedź nie daje wyniku „nieskończoność”. Zero i nieskończoność to dwie wielkości, jednak w przeciwieństwie do zwykłych liczb, mają pewne wyjątkowe wymogi: zero pomnożone przez dowolną liczbę zawsze daje wynik zero, a nieskończoność pomnożona przez dowolną liczbę daje wynik nieskończoność. Co się dzieje, gdy mnożą się zero i nieskończoność? Wynik, który się pojawia, pozostaje nieokreślony. Aby zrozumieć, że takie sumy mogą być skończone, trzeba było poczekać do XVIII wieku. Dopiero wtedy zaczęto buntować się przeciwko dyktatowi perypatetyków, co ostatecznie doprowadziło Georga Cantora (1845-1918) do stworzenia zadowalającej i spójnej teorii matematycznej nieskończoności.

Ważne jest, aby jasno wyrazić znaczenie słów, za pomocą których zostanie zaprezentowana koncepcja matematyczna, i odpowiadające im obrazy, wybrane do jej zilustrowania: konstrukcji abstrakcyjnej koncepcji nie można bowiem oddzielić od przykładów. W matematyce obraz nigdy nie może być reprezentatywny dla pojęcia, do którego się odnosi, służy jedynie do jego przywołania , niemniej jednak zły lub niewłaściwie wykorzystany obraz może łatwiej spowodować nieporozumienie niż źle napisany tekst.

Słowo „wyobraźnia” jest powiązane z obrazem i umożliwia tworzenie mentalnych obrazów, które z pewnością różnią się od postaci widzianej w książce lub na ekranie komputera i są w rzeczywistości bardziej abstrakcyjne, na przykład, jeśli chodzi o dwuwymiarową reprezentację trójwymiarowej struktury. Zmysł wzroku często wiąże się z czasownikiem „widzieć”, który w wielu językach jest w zależności od kontekstu synonimem „rozumieć coś”: i niekoniecznie odnosi się do zmysłu wzroku lub do rzeczywistego obrazu, czasami może być obrazem mentalnym lub abstrakcyjną koncepcją. Niemniej jednak, aby wyobraźnia mogła poradzić sobie ze wszystkimi pięcioma zmysłami: to stwierdzenie należy wziąć pod uwagę przy konstruowaniu różnych strategii nauczania celem dotarcia do predyspozycji i zdolności różnych uczniów.

2.3 Analiza języka używanego w podręcznikach do matematyki w celu wykazania związku między językiem a trudnościami uczniów; określenie, jakie strategie językowe są lub mogą być stosowane celem lepszego zrozumienia pojęć i lepszego podejścia do rozwiązywania problemów.

Badania podkreślają sposób, w jaki trudności w komunikacji językowej sprawiają, iż bezpośrednia interwencja w treści matematyczne stanie się daremna. Ukazują fakt, że nauczyciel musi nieustannie oscylować podczas pracy w klasie między używaniem języka do wyrażania treści matematyczne a używaniem go w celu interakcji z klasą, która wymaga znacznej świadomości metajęzykowej.

Przekonania dotyczące matematyki w wielu przypadkach wpływają na zaangażowanie motywacyjne młodych uczniów, w odniesieniu do problemów wyrażonych w treści polecenia, w szczególności te związane z formułowaniem problemu, nakreśleniem stereotypów (także językowych) i nieporozumieniami w formułowaniu problemów szkolnych wywołują błędne przekonania i generują dewiacyjne postawy wobec problemów i samej matematyki. Opracowania używające terminu „nieporozumienia” mają swoje podstawy teoretyczne i są wynikiem stopniowego udoskonalania badań w zakresie edukacji matematycznej. W szczególności idea błędnego przekonania i podejście do błędu są punktem wyjścia do radykalnej zmiany w kierunku tej definicji, która stawia w centrum uwagi ucznia i jego procesy uczenia się. To właśnie ta zmiana punktu widzenia powoduje, że uczący się jest obecnie uważany za aktywny podmiot, który tworzy własną wiedzę. Dokładniej, model ten podważa tradycyjną interpretację błędów. W rzeczywistości uczeń interpretuje doświadczenia z matematyką, w szczególności komunikaty, które nauczyciel stale wysyła: uczeń nadaje znaczenie tym komunikatom, sens, który w naturalny sposób zależy od posiadanej wiedzy, ale także wielu innych, mniej oczywistych elementów. Ten algorytm, ten termin, ten symbol, ta właściwość, ta koncepcja zostaną zinternalizowane zgodnie z sensem przypisanym przez ucznia i może się zdarzyć, że znaczenie to nie będzie pokrywało się z tym, co nauczyciel zamierzał przekazać.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Uczący się, a bardziej ogólnie, jednostka, nieustannie interpretuje świat, wiążąc zaobserwowane fakty z wcześniejszymi doświadczeniami: przekonania są właśnie wynikiem tej nieustannej próby nadania sensu rzeczywistości i jednocześnie określają wzorce, za pomocą których jednostka podchodzi do świata, wyobrażając sobie przyszłe doświadczenia. Dlatego w edukacji matematycznej przekonania uczniów są postrzegane jako wynik ciągłego procesu interpretacji własnych doświadczeń z matematyką; z drugiej strony, określając wzorce, według których interpretowane jest przyszłe doświadczenie, przekonania działają jako przewodnik po wyborze zasobów do aktywacji; ale zdarza się także, że mogą uniemożliwić korzystanie z odpowiedniej wiedzy i zasobów. Przekonania i błędne pojęcia działają jak filtr lub uproszczone teorii (w także rzeczywistości).

Słowami Lva Vygotsky'ego:

> *Koncepcje naukowe ewoluują w warunkach systematycznej współpracy między dzieckiem a nauczycielem. Rozwój i dojrzewanie wyższych funkcji umysłowych dziecka są produktami tejże współpracy. Nasze badanie pokazuje, że postęp rozwojowy ujawnia się w rosnącej względności myślenia przyczynowego oraz w osiąganiu pewnej swobody myślenia w koncepcjach naukowych. Koncepcje naukowe rozwijają się wcześniej niż koncepcje spontaniczne, ponieważ korzystają z systematyczności nauczania i współpracy. Ta wczesna dojrzałość pojęć naukowych nadaje im rolę przewodnika propedeutycznego w rozwoju koncepcji spontanicznych. Niski poziom wykorzystywania przez dziecko spontanicznych pojęć zależy od tego, że dziecko nie potrafi jeszcze swobodnie i dobrowolnie używać pojęć oraz tworzyć abstrakcji. Trudność z pojęciami naukowymi polega na ich werbalizmie, czyli na nadmiernej abstrakcji i oderwaniu od rzeczywistości. Jednocześnie sama natura pojęć naukowych skłania do ich świadomego stosowania, co stanowi ich przewagę nad koncepcjami spontanicznymi. Około czwartej klasy werbalizm ustępuje konkretyzacji, co z kolei pozytywnie wpływa na rozwój spontanicznych pojęć. Obie formy rozumowania osiągają w tej chwili mniej więcej ten sam poziom rozwoju*.

Testy z matematyki INVALSI przeprowadzane w ostatnich latach we włoskich szkołach dostarczyły ogromnej ilości wyników i uwypukliły wiele zjawisk w skali makro, które można przypisać trudnościom tekstowym lub językowym włoskim uczniom. Jak stwierdzają Branchetti i Viale, syntaktyczny wymiar tekstu matematycznego nie wydaje się być szczególnie analizowany na studiach dydaktycznych, ani matematycznych, ani lingwistyczno-wychowawczych. Dopiero w ostatnich latach pogłębiła się świadomość roli, jaką wymiar językowy pełni w matematyce jako jej podstawowy składnik, w przeciwieństwie do pewnej idei odziedziczonej po szkolnej tradycji, która chce, by język i matematyka były oddzielne i nieprzekazywalne.

Tradycyjne podręczniki matematyczne we Włoszech wykorzystują problemy, które często charakteryzują się nazbyt złożoną składnią, użyciem zdań podrzędnych z użyciem imiesłowu czasu przeszłego (np. Podany trapez ...) lub form odczasownikowych i aspektów czasownikowych. Typowe dla tradycyjnego stylu matematyki jest również użycie pasywnej formy bezosobowej (po włosku: „si passivante") i klauzul w nawiasach. Wysoka częstotliwość zdań złożonych, która zwiększa gęstość informacji w zdaniu; użycie formy „tak, aby", po której w języku włoskim następuje tryb łączący, wpisuje się w typowy styl tradycyjnego tekstu matematycznego. Warto zauważyć, że niektóre podręczniki powielają moduły składniowe typowe dla włoskiej tradycji tekstów matematycznych tego gatunku również w angielskiej wersji niektórych ćwiczeń, jak na przykład poniższy przykład z sekcji angielskiej „Sprawdź swoje umiejętności" używanego podręcznika referencyjnego w technikum w pierwszych dwóch latach nauki: „Each day a company can produce a maximum of 300 tons of a certain product. For each ton produced the cost of manufacturing and raw materials is € 1,6 and the standing daily expenses are € 36,00. Find the maximum profit and the minimum amount so as not to be in deficit knowing that each ton is sold at € 4,00"(„Każdego dnia firma może wyprodukować maksymalnie 300 ton określonego produktu. Na każdą wyprodukowaną tonę koszt produkcji i surowców wynosi 1,6 €, a stałe dzienne wydatki 36,00 €. Znajdź maksymalny zysk i minimalną kwotę, aby nie mieć deficytu wiedząc, że każda tona jest sprzedawana po 4,00 €").

Dobrym przykładem podręcznika referencyjnego we Włoszech są prace Massimo Bergaminiego, Grazielli Barozzi i Anny Trifone, Manuale di Matematica blu, rosso, azzurro e verde, opublikowane przez Zanichelli,

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

mające na celu pokazanie powiązań między matematyką a otaczającą nas rzeczywistością; teoria jest wyrażona ze szczególnym uwzględnieniem użycia jasnego języka, za pomocą rygorystycznych i precyzyjnych kryteriów, i przedstawia wiele ćwiczeń zaczerpniętych z sytuacji życia codziennego, wyważenie wykorzystuje obrazy i odniesienia do działań związanych z witryną internetową. Reguły i wzory przedstawione są za pomocą różnych systemów-modeli, odnoszących się do różnych umiejętności uczniów oraz strategii i zwyczajów uczenia się, a także część przeznaczona dla uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi.

Polska poetka Wisława Szymborska, laureatka nagrody Nobla, poświęciła matematyce kilka wierszy we Wszystkich lekturach nadobowiązkowych, tak oto pisząc o księciu geometrii, czyli o Pitagorasie:

> *Doskonale mogę sobie wyobrazić antologię najpiękniejszych fragmentów poezji światowej, w której znalazłoby się miejsce na twierdzenie Pitagorasa. Czemuż by nie? Jest tam olśnienie właściwe wielkiej poezji i forma świetnie sprowadzona do słów najpotrzebniejszych, i gracja jakaś, która nie każdemu nawet poecie jest dana...*

Bibliografia

[1] J. Conway, P. Doyle, J. Gillman, W. Thurston, Geometry and the Imagination, in www.geom.uiuc.edu/docs/education/institute91

[2] Efraim Fischbein, The theory of figural concepts, in "Educational Studies in Mathematics" 24 (1993), pp. 139–162.

[3] Fandiño Pinilla M. I. (2014), *Diverse componenti dell'apprendimento della matematica*. In: D'Amore B. (Eds) "La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire". Atti del Convegno Nazionale omonimo, 3-4-5 marzo 2014, Tricase (Lecce). Bologna: Pitagora, pp. 71-80.
Lytt I. Gardner, Deprivation dwarfism, in Scientific American 1972 July; 227(1): pp. 76-84.

[4] Stephen Krashen, (1982). Principles and Practice in Second Language Acquisition, online: http://www.sdkrashen.com/content/books/principles_and_practice.pdf

[5] E. Stevick, (1976) Memory, Meaning, and Method. Rowley, Ma.: Newbury House.
Strand, S. (2014). *School effects and ethnic, gender and socioeconomic gaps in educational achievement at age 11*. Oxford Review of Education, 40, (2), 223-225

[6] Geary, D.C., Hoard, M.K., & Bailey, D.H. (2012). *Fact retrieval deficits in low achieving children and children with mathematical learning disability*. Journal of Learning Disabilities, 45, 4, pp. 291-307

[7] Bartelet, D., Ansari, D., Vaessen, A. & Blomert, L. (2014). *Cognitive subtypes of mathematics learning difficulties in primary education*. Research in Developmental Disabilities, 35, 3, pp. 657-670

[8] Brian G. Dias, Stephanie A. Maddox, Torsten Klengel & Kerry J. Ressler, *Epigenetic mechanisms underlying learning and the inheritance of learned behaviors*, in "Trends in Neurosciences", 2015; 38 (2): pp. 96-107.

[9] Gottfried Leibniz, letter to Christian Goldbach, April 17, 1712. Original lat.: "Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi". In Gottschalk Eduard Guhrauer (Ed.): *Nachträge zu der Biographie. Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibnitz*, Ferdinand Hirt's Verlag, Breslau 1846

[10] Wisława Szymborska, *Wszystkie lektury nadobowiązkowe*, Otwarte, 2015; English version: *Nonrequired reading. Prose pieces*, translated by Clare Cavanagh, Harcourt, New York-San Diego-London, 2002.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

[11] Branchetti, Laura & Viale, Matteo. (2014) *Tra italiano e matematica: il ruolo della formulazione sintattica nella comprensione del testo matematico*. In Atti del Convegno internazionale “La didattica dell’italiano. Problemi e prospettive.” Locarno 24-26 ottobre 2014, G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, University of Palermo, Italy), 2014.

[12] Branchetti, Laura & Viale, Matteo, *Matematica e creatività linguistica: gli esercizi di stile applicati ai problemi aritmetici*, in “Opera Nuova, Rivista internazionale di scritture e scrittori”, n. 19, 2019/1.

[13] Bradley, Renée, Danielson, Louis C. & Hallahan, Daniel P., *Identification of learning disabilities: research to practice*. Routledge, 2002

[14] Lev Vygotsky, *Thought and Language*, Cambridge (Massachusetts)-London (England), MIT Press, 2012, pp. 157-158.

[15] Parsons S, Bynner J & Brewer E. *Does numeracy matter more?* Natl Res Dev Cent Adult Lit Numer 2005;1-37

[16] Rivera-Batiz FL., *Quantitative literacy and the likelihood of employment among young adults in the United States*. J Hum Resour 1992;27: 313-28.

[17]Italian Constitution

[18] Giannis Karagiannakis, Anna Baccaglini-Frank & Yiannis Papadatos, Mathematical learning difficulties subtypes classification, in “Frontiers in Human Neuroscience”, 2014; 8: 57.

[19] Neelkamal Soares, Teresa Evans & Dilip R. Patel, *Specific learning disability in mathematics: a comprehensive review*, in “Translational Pediatrics” 2018 Jan; 7(1): 48–62.

[20] Mazzocco MM. Defining and differentiating mathematical learning disabilities and difficulties. In: Berch D, Mazzocco MM, editors. Why Is Math So Hard for Some Children? The Nature and Origins of Mathematical Learning Difficulties and Disabilities. Baltimore, MD: Paul H. Brookes Pub Co, 2007:29-47.

[21] Mazzocco MM., *Challenges in identifying target skills for math disability screening and intervention*. In “Journal of Learning Disabilities” 2005 Jul-Aug; 38(4):318-23.

[22] World Health Organization. International statistical classification of diseases and related health problems. 10th ed. Geneva

[23] Bruno D’Amore, *Matematica. Stupore e poesia*, Giunti, 2010.

[24] Giorgio Bolondi, *Competenze linguistiche e competenze matematiche: interdisciplinarità e formazione degli insegnanti*, in F. Clementi & L. Serianni “*Quale scuola? Le proposte dei Lincei per l’italiano, la matematica, le scienze*, Carocci, 2015.

[25] Bolondi G., Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell’apprendimento della matematica*. In. D’Amore B., Sbaragli S. (eds.) (2008). Didattica della matematica e azioni d’aula. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 129-131;

[26] Fandiño Pinilla M.I. (2008). Molteplici aspetti dell’apprendimento della matematica. Trento: Erickson.
OECD (2020), Mathematics performance (PISA) (indicator). doi: 10.1787/04711c74-en (Accessed on 12 May 2020).

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

[27] M. D'Aprile & P. L. Ferrari, *Linguaggi e rappresentazioni nella formazione degli insegnanti di matematica*, in "La matematica e la sua didattica" n. 4/2003.

[28] Rosetta Zan, *Difficoltà in matematica: Osservare, interpretare, intervenire*, Springer Milan, 2007.

[29] Zovkic, I. B., Guzman-Karlsson, M. C., & Sweatt, J. D., *Epigenetic regulation of memory formation and maintenance*, in "Learning & memory" (Cold Spring Harbor, N.Y.) 2013; 20(2), 61–74
Wisława Szymborska Wszystkie lektury nadobowiązkowe, Otwarte, 2015

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.