SMILD

Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

STRUMENTO DI INTERVENTO

Comprendere i ruoli di lettere e numeri in Algebra.

1. Introduzione

Lo strumento di intervento proposto ha lo scopo di guidare gli studenti verso una comprensione del ruolo giocato dalle lettere e dai numeri in Algebra, partendo dalla rilevazione delle difficoltà relative alla costruzione del significato di variabile, di espressioni dipendenti da questa variabile ovvero del ruolo delle lettere e dei numeri nelle espressioni stesse. Per sviluppare questo percorso didattico ci riferiamo ad un contesto teorico che sarò descritto nel paragrafo2.

Nel paragrafo 3 sarà descritta la progettazione delle attività didattiche. In particolare, se le attività sono rivolte a uno studente o all'intera classe, lo scopo didattico delle attività, l'area cognitiva e il dominio matematico di interesse e gli oggetti matematici nelle aree di difficoltà identificate attraverso il questionario B2.

2. Contesto teorico di riferimento

I riferimenti teorici che ci hanno aiutato a progettare le attività seguenti sono:

1) Principi della Progettazione Universale per l'Apprendimento – (PUA o UDL – Universal Design for Learning) (Tabella 3), un contesto concepito specificatamente per progettare attività didattiche inclusive (http://udlguidelines.cast.org/)

	Fornire molteplici mezzi di COINVOLGIMENTO	Fornire molteplici mezzi di RAPPRESENTAZIONE	Fornire molteplici mezzi di AZIONE ed ESPRESSIONE
	Reti Efficaci – I "PERCHÈ" dell'apprendimento	Reti di Riconoscimento – Il "COSA" dell'apprendimento	Reti Strategiche – Il "COME" dell'apprendimento
Accedere	Fornire opzioni per **Catturare l'interesse**: • Ottimizzare la scelta individuale e l'autonomia • Ottimizzare rilevanza, valore e autenticità • Minimizzare minacce e distrazioni	Fornire opzioni per la **Percezione:** • Offrire modi di personalizzare la visualizzazione delle informazioni • Offrire alternative di sollecitazioni uditive • Offrire alternative per le informazioni visive	Fornire opzioni per **Azioni Fisiche:** : • Variare i metodi di risposta e di movimento • Ottimizzare l'accesso a strumenti e tecnologie assistive
Costruire	Fornire opzioni per **Sostenere Sforzo & Persistenza** • Rafforzare l'importanza degli scopi e degli obiettivi • Variare richieste e risorse per ottimizzare la sfida • Promuovere collaborazione e condivisione • Accrescere i *feedback* orientati alla padronanza dell'apprendimento	Fornire opzioni per **Linguaggio & Simboli** • Precisare il lessico e i simboli • Precisare la sintassi e la struttura • Supportare la decodifica di testo, notazioni e simboli matematici • Promuovere la comprensione in tutti i linguaggi • Illustrare attraverso molteplici mezzi	Fornire opzioni per **Espressione e Comunicazione**: • Usare molteplici mezzi di comunicazione • Usare molteplici mezzi di costruzione e composizione • Costruire fluidità nella comunicazione mediante livelli di supporto graduali per la pratica e la prestazione

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Interiorizzare	Fornire opzioni per l'**auto-regolamentazione:** • Promuovere prospettive e convinzioni che ottimizzano la motivazione • Facilitare capacità personali e strategie • Sviluppare autovalutazione e riflessione	Fornire opzioni per la **Comprensione:** • Attivare o fornire la conoscenza del contesto • Evidenziare percorsi, caratteristiche fondamentali, le grandi idee e le relazioni • Guidare la visualizzazione e i processi delle conoscenze • Massimizzare trasferimento e generalizzazione delle conoscenze	Fornire opzioni per la **Funzioni Esecutive** Guidare verso la definizione di obiettivi appropriati: • Supportare lo sviluppo di pianificazioni e strategie • Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse • Potenziare la capacità di monitorare i progressi
	Studenti esperti che sono…		
	Determinati & Motivati	Intraprendenti e Competenti	Strategici e Orientati agli obiettivi

Tabella 3: Linee guida PUA/UDL

Il Centro per le Speciali Tecnologie Applicate (CAST) ha sviluppato un quadro completo attorno al concetto di Universal Design for Learning (UDL), con l'obiettivo di concentrare la ricerca, lo sviluppo e la pratica educativa sulla comprensione della diversità e sulla facilitazione dell'apprendimento. L'UDL include una serie di Principi, articolati in *Linee guida e punti di controllo*[1]. La ricerca alla base della struttura di UDL è che "gli studenti sono molto variabili nella loro risposta all'istruzione. [...] "

Pertanto, l'UDL si concentra su queste differenze individuali come elemento importante per comprendere e progettare istruzioni efficaci per l'apprendimento.

A questo scopo, l'UDL propone tre Principi fondamentali: 1) fornire molteplici mezzi di rappresentazione, 2) fornire molteplici mezzi di azione ed espressione, 3) fornire molteplici mezzi di coinvolgimento. In particolare, le linee guida all'interno del primo principio si riferiscono ai mezzi di percezione coinvolti nel ricevere determinate informazioni e di "comprensione" delle informazioni ricevute. Le linee guida all'interno del secondo principio tengono conto dell'elaborazione di informazioni/idee e della loro espressione. Infine, le linee guida all'interno del terzo principio trattano il dominio dell'"affetto" e della "motivazione", anch'essi essenziali in ogni attività educativa.

Per le nostre analisi, ci concentreremo in particolare su linee guida specifiche all'interno dei tre Principi[2].

Le linee guida all'interno del Principio 1 (*fornire molteplici mezzi di rappresentazione*), suggeriscono di proporre diverse alternative di percezione e di offrire supporto per la decodifica di notazioni e simboli matematici. Inoltre, le linee guida suggeriscono l'importanza di fornire alternative per la comprensione evidenziando modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni tra nozioni matematiche. Infine, la nostra analisi darà esempi di applicazione di come il software Geogebra[3] possa guidare la visualizzazione e manipolazione in modo da massimizzare trasferimento e generalizzazione degli apprendimenti.

Inoltre, le linee guida del Principio 2 (forniscono molteplici mezzi di azione ed espressione) suggeriscono di offrire diverse alternative di espressione e comunicazione a supporto della pianificazione e dello sviluppo della strategia. Infine, le linee guida del Principio 3 mostrano come determinate attività possono reclutare l'interesse degli studenti, ottimizzando la scelta e l'autonomia individuali e riducendo al minimo le minacce e le distrazioni.

Nella sezione 4 presenteremo esempi di attività, discutendo il tipo di apprendimento matematico a cui si rivolgono e l'area cognitiva che supportano. Mostreremo come questi esempi sono stati progettati all'interno della cornice dei principi UDL al fine di renderli inclusivi ed efficaci per superare le difficoltà matematiche individuate attraverso il questionario B2.

2) Il Progetto Europeo **FaSMed** che si focalizza sulla valutazione formativa in matematica e scienze, https://research.ncl.ac.uk/fasmed/).

La valutazione formativa (VF) è concepita come un metodo di insegnamento in cui "l'evidenza circa i risultati dello studente è ottenuta, interpretata e usata da insegnanti, studenti e dai loro

[1] Per una lista complete di questi principi, line guida a punti di controllo a una descrizione più vasta delle attività di CAST, visitare il sito http://www.udlcenter.org/

[2] Gli elementi sono presi dall'elenco interattivo su http://www.udlcenter.org/research/researchevidence

[3] https://wiki.geogebra.org/en/Manual per i dettagli.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

pari per prendere decisioni sui passi successivi da compiere nell'istruzione che possono essere migliori o meglio fondati rispetto alle decisioni che sarebbero state prese in assenza dell'evidenza che è stata ottenuta" (Black & Wiliam, 2009, p. 7).
Il progetto FaSMed fa riferimento agli studi di William e Thompson del 2007, che indentificano cinque strategie chiave per la pratica della VF in ambito scolastico: (a) Chiarire e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo; (b) progettare discussioni efficaci in classe e altre attività di apprendimento che producano evidenza della comprensione degli studenti; (c) fornire feedback che facciano progredire gli studenti; (d) far sì che gli studenti siano risorse di apprendimento uno per l'altro; (e) far sì che gli studenti siano padroni del loro apprendimento. L'insegnante, i compagni e lo studente stesso sono gli artefici della messa in atto di queste strategie di VF.

Tabella 4: Strategia per la valutazione formativa

<table>
<tr><th></th><th>Dove sta andando lo studente</th><th>Dov'è lo studente adesso</th><th>Come arrivare</th></tr>
<tr><td>Insegnante</td><td rowspan="3">1 Chiarire gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo

Comprendere e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo

Comprendere e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo</td><td>2 Progettare discussioni efficaci in classe e altre attività di apprendimento che producano evidenza della comprensione degli studenti</td><td>3 Fornire feedback che facciano progredire gli studenti</td></tr>
<tr><td>Pari</td><td colspan="2">4 Far sì che gli studenti siano risorse di apprendimento uno per l'altro</td></tr>
<tr><td>Studente</td><td colspan="2">5 Far sì che gli studenti siano padroni del loro apprendimento</td></tr>
</table>

Le attività FaSMed sono organizzate in sequenza, comprendono lavori di gruppo su fogli di lavoro, discussioni di classe dove i lavori di gruppo selezionati sono discussi dalla classe intera, sotto la direzione del docente. Tenendo conto delle strategie della valutazione formativa e delle funzionalità tecnologiche, Cusi, Morselli & Sabena (2017, p. 758) hanno ideato tre tipi di fogli di lavoro per le attività in classe:

(1) ***Fogli di lavoro per Problema***: fogli di lavoro che introducono un problema e propongono una o più domande che coinvolgono l'interpretazione o la costruzione della rappresentazione (verbale, simbolica, grafica e tabulare) della relazione matematica tra due variabili (e.g. interpretare un grafico tempo - distanza);
(2) ***Fogli di lavoro di Aiuto***: concepiti per supportare gli studenti che incontrano difficoltà con il *foglio di lavoro per problema* proponendo specifici suggerimenti (e.g. domande guidate);
(3) ***Foglio di lavoro per Sondaggio***: fogli di lavoro che suggeriscono un sondaggio tra diverse opzioni.

Gli autori hanno identificato delle strategie di *feedback* che l'insegnante può adottare per fornire un riscontro agli studenti (Cusi, Morselli & Sabena, 2018, p. 3466). Queste strategie sono impiegate nella discussione in classe organizzata dal docente dopo il lavoro di gruppo:

Tabella 5:

Ridare voce	Quando l'insegnante fa da specchio ad un intervento di un alunno in modo da richiamare l'attenzione su di esso. Spesso, durante l'attività di *ridare voce,* l'insegnante sottolinea con l'intonazione della voce alcune parole della frase che sta ripetendo.
Riformulare	La riformulazione si ha quando il docente riformula l'intervento di uno studente, con il doppio scopo di richiamare l'attenzione della classe e rendere l'intervento più intellegibile a tutti.

	La riformulazione avviene quando l'insegnante avverte che l'intervento può essere utile ma necessita di essere comunicato in un modo migliore per diventare una risorsa per gli altri. […]. Le strategie del ridare voce e riformulare trasformano uno studente (l'autore dell'intervento) in una risorsa per la classe.
Riformulare con una struttura	Quando il docente, oltre a riformulare, aggiunge alcuni elementi per guidare il lavoro degli studenti.
Rilanciare	Quando il docente reagisce all'intervento dello studente, che considera interessante per la classe, non dando un *feedback* diretto, ma ponendo una domanda connessa. In questo modo, attraverso "*il rilancio"* l'insegnante fornisce un *feedback* implicito […] all'intervento dello studente, suggerendo che l'argomento è interessante e prezioso da approfondire o, al contrario, che ha qualche punto problematico e dovrebbe essere rivisto.
Contrastare	Il contrastare prende piede quando il docente richiama l'attenzione su due o più interventi, che rappresentano due differenti posizioni, così da promuovere un confronto. Dal contrasto, […] gli autori delle due posizioni possono essere una risorsa per la classe così come essere responsabili del proprio apprendimento.

Noi estraiamo dall'esperienza del FaSMed l'idea di creare attività di classe nella prospettiva della valutazione formativa, che può promuovere l'inclusione.

3. Progettazione

3.1 Difficoltà identificate attraverso il questionario B2

Abbiamo rilevato difficoltà nel seguente punto del questionario B2 (Q4Al4)

Se x=2, completa le seguenti espressioni: $x^2 = \ldots$
2x=…
x2=…

Queste difficoltà sono relazionate alla costruzione del significato di variabile, di espressione dipendente da questo tipo di variabile e, in particolare, dalla differente azione che svolge la posizione di numeri e lettere, i.e. del ruolo di lettere e numeri nell'espressione.

3.2 Area cognitive e dominio matematico di interesse

L'area delle difficoltà identificate attraverso il questionario B2 è relazionata al dominio dell'*Algebra*. In particolare, le difficoltà sono relazionate alla costruzione del significato di variabile, di espressione dipendente da tale variabile e, in particolare, della differente azione svolta dalla posizione di numeri e lettere nell'espressione, i.e. del ruolo di lettere e numeri nell'espressione. Pertanto, l'area cognitiva coinvolta è quella *Visuo- Spaziale (Tabella 1).*

Tabella 1: le difficoltà rilevate sono collegate al dominio cognitivo *Visuo – Spaziale* e nel dominio dell'*Algebra.*

	Arithmetic	Geometry	Algebra
Memoria			
Ragionamento			

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Visuo - spaziale			*Se x=2, completa le seguenti espressioni:* x^2= … *2x=…* *x2=…*

3.3 Obiettivi didattici

Lo strumento di intervento ha come obiettivo di condurre gli studenti verso la *Comprensione dei ruoli giocati dalle lettere e dai numeri in Algebra.*

3.4 Rivolgersi allo Studente o alla classe

Lo strumento di intervento è articolato in una serie di attività da condurre con tutta la classe, nella prospettiva dell'inclusione.

3.5 Attività didattiche: lo strumento di intervento

Le sequenze di insegnamento sono concepite per identificare specifiche difficoltà di apprendimento, in una prospettiva di inclusione. Le attività sono pensate, prima di tutto, per entrare in empatia con gli studenti per quel che riguarda le loro difficoltà avvicinandosi all'algebra. In accordo con Villani (2014) c'è anche un contributo psicologico per gli studenti nell'avvicinarsi all'algebra. Molti docenti e testi affermano che: " In Algebra noi operiamo con le lettere come operiamo con i numeri", ma è davvero così? Partendo da questo spunto di riflessione possiamo provare a condividere con gli studenti i loro dubbi emergenti relazionati agli esercizi proposti, analizzando l'aspetto semantico presente dietro le tre espressioni proposte.
Quindi, per chiarire da un punto di vista Visuo-Spaziale il significato e così le similitudini e le differenze dei calcoli variando coefficienti e variabili, vengono usati strumenti ICT, in particolare Geogebra, un software di geometria dinamica.

Spunti di riflessione approcciando l'algebra

Il primo passo è dunque quello di condividere con gli studenti le loro difficoltà avvicinandosi all'algebra. Possiamo aprire una discussione nella classe attorno all'affermazione: "In Algebra noi operiamo con le lettere come operiamo con i numeri". Possiamo adottare la metodologia del dibattito: dividiamo la classe in due parti. Naturalmente, una argomenterà a favore e l'altra contro l'affermazione fatta. Il miglior modo per far funzionare la metodologia del *debate* è di dividere la classe in quattro gruppi e assegnare due gruppi a ciascuna delle due risoluzioni. Quindi assegniamo una di ogni coppia di gruppi di studenti alla risoluzione affermativa. Questo gruppo discuterà gli argomenti presentati. Gli altri due gruppi rappresenteranno la risoluzione negativa e argomenteranno contro la risoluzione. Durante il dibattito, l'altro gruppo serve da giudice e decide quale parte ha presentato il caso più forte votando per i vincitori del dibattito alla sua conclusione.

L'insegnante fa solo da supervisore, tenendo traccia dei tempi delle diverse fasi del dibattito, dando agli studenti istruzioni aggiuntive sul lessico specifico che può essere coinvolto ed esempi per sostenere le loro tesi. Per esempio, potremmo dare le seguenti espressioni: $\frac{a+b}{a} = \frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}} = b$; $\frac{a}{ab} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b} = \frac{0}{b} = 0$; $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ chiedendo agli studenti di dibattere sul perché sono i più comuni errori commessi dagli studenti in tutto il mondo!
Possiamo usare le stesse espressioni ma usando i numeri e chiedendo agli studenti di svolgere le operazioni per fare un confronto tra aritmetica e algebra.
Con questa prima attività orale, anche usando note scritte sul dibattito, possiamo sperimentare le cinque strategie di *feedback* del FaSMed richiamate nella tabella 5.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Possiamo in particolare tracciare una carrellata dei diversi termini usati dagli studenti, sottolineando in particolare il significato e il ruolo delle lettere e dei numeri in una espressione, per esempio la differenza tra variabile e incognita tra le lettere e tra coefficiente ed esponente tra i numeri. Inoltre, possiamo discutere la differenza tra un risultato in aritmetica ed uno in algebra. In particolare, poniamo che tra gli argomenti contro l'affermazione che in algebra noi operiamo come con i numeri, qualche studente abbia evidenziato che in algebra spesso otteniamo un risultato che è ancora una espressione algebrica mentre tra le operazioni con i numeri noi otteniamo solo un numero e questa è una delle motivazioni di molti errori in algebra, come quelli degli esempi su dati.
Questi errori sono molto comuni tra gli studenti, dato che loro si sentono "psicologicamente costretti" ad ottenere solo una lettera come risultato, come con i numeri. Se la stessa espressione fosse scritta con i numeri, gli studenti svolgerebbero il calcolo correttamente perché con i numeri sono in grado di controllare la procedura da un punto di vista semantico mentre con le lettere questo controllo è perso, tutte le certezze con qualcosa di familiare e concreto svaniscono.
Questo tipo di approfondimento, anche se attraverso espressioni diverse da quelle che dobbiamo risolvere, ha lo scopo di indurre gli studenti a pensare alle differenze e alle similitudini tra algebra e aritmetica confortandoli rispetto al fatto che è in qualche modo normale, all'inizio, essere frastornati passando dal calcolo tra i numeri al calcolo con le lettere.

Primo passo: interpretazione matematica delle espressioni date

Come primo approccio per meglio comprendere il diverso significato delle espressioni, proponiamo di aprire una discussione in classe sul significato delle operazioni da fare.

Questa attività sarà fatta nell'insieme dei numeri interi positivi.

Gli studenti saranno invitati a scrivere una definizione di *moltiplicazione* a parole loro, e quindi l'insegnante raccoglierà i fogli di lavoro e farà solo da moderatore alla discussione, in accordo con i 5 principi riepilogati in tabella 5.

Con fiducia, riusciremo ad avere una definizione condivisa e corretta di moltiplicazione come un modo diverso di fare un'addizione, un modo più compatto di scrivere un'addizione, i.e. *per gli interi positivi, la* ***moltiplicazione*** *consiste nell'aggiungere un numero (il moltiplicando) a se stesso uno specifico numero di volte dato da un altro numero (il moltiplicatore). Il risultato è chiamato prodotto.*

Possiamo partire con x^2 quando $x = 3$ invece di 2 per guardare a $x = 2$ come ad un caso specifico alla fine della procedura. Dovremo anche specificare che, a sua volta, x^2 è un modo compatto di scrivere la moltiplicazione di un numero per se stesso.
Così: $x^2 = 3^2 = 3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 = 9$ mentre $2x = 2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$.
Chiediamo quindi agli studenti di iterare la procedura con valori diversi di *x* in modo da convincersi della differenza tra le due operazioni sebbene entrambe possano essere ricondotte ad una somma, i.e. possiamo cominciare a guardare al diverso ruolo svolto dal 2 in base alla sua posizione rispetto alla lettera nell'espressione.
Con questa strategia, possiamo esplorare in modo profondo il reale significato delle due espressioni. Richiamando la proprietà commutativa dell'addizione possiamo mostrare che $x2 = 2x$ e così essi danno lo stesso risultato, provando ancora con specifici numeri al posto di *x.*

Dopo di che possiamo concentrarci sul fatto che nel caso di $x = 2$ lo stesso risultato (4) delle differenti operazioni è solo un mero caso e che normalmente le due espressioni implicano diverse operazioni da svolgere e, generalmente, i risultati sono dunque diversi.

L'ambito Visuo – Spaziale: punto di vista geometrico

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Dopo questo *step* preliminare condotto per prendere familiarità con il problema da risolvere, possiamo passare al cuore dell'attività per la classe che coinvolge l'approccio visuo-spaziale e il punto di vista geometrico, in particolare, spostiamo la precedente attività su una specifica concreta area di interesse.

Con Geogebra tracciamo un segmento di lunghezza 2 che chiamiamo x. Quindi costruiamo un quadrato di lato *x=2* per avere una rappresentazione geometrica dell'espressione $x^2 = 2^2 = 4$ come l'area del quadrato (Fig.1).

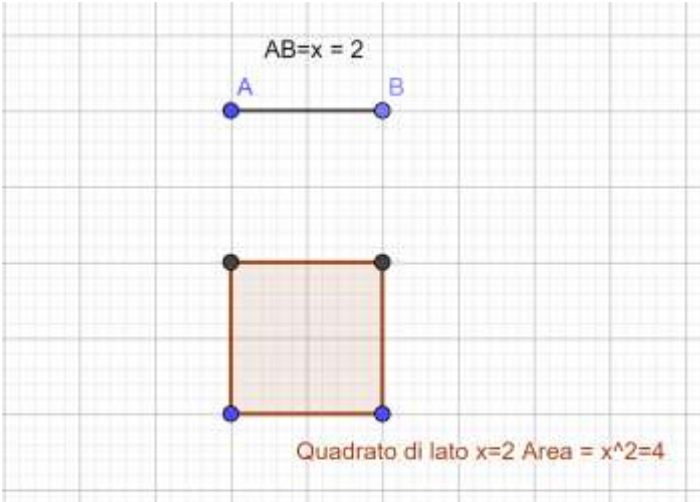

Fig. 1 *Costruzione del quadrato di lato 2 partendo dal segmento di lunghezza x=2 (Geogebra)*

Dopo di questo possiamo chiedere agli studenti di rappresentare x2 and 2x sui loro quaderni. A seconda delle loro risposte, viene aperta una discussione.
Possiamo anche fare questo con Geogebra (Fig.2)..

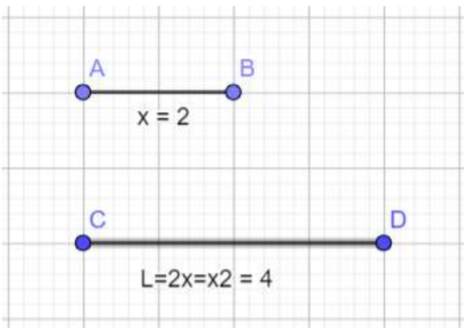

Fig. 2 *Costruzione di un segmento che abbia lunghezza doppia del segmento AB (Geogebra)*

Se risulta chiaro agli studenti che x2 è lo stesso di 2x che è diverso da x^2 perché loro disegneranno correttamente un segmento di lunghezza doppia rispetto ad *x,* possiamo chiedere loro di spiegare ciascuno dei differenti ruoli svolti dal numero 2 se posto come esponente o come fattore.
Sebbene il risultato nel caso di x=2 sia matematicamente lo stesso, mediante la rappresentazione visuale di elementi geometrici, sarà evidente a prima vista che nel primo caso si ottiene un'area mentre nell'ultimo abbiamo ancora un segmento.
Questa considerazione sarà ovviamente maggiormente sottolineata nel caso di una risposta sbagliata da parte degli studenti.
Possiamo anche fare una riflessione sulle unità di misura e sulle dimensioni delle grandezze coinvolte, richiamando concetti fisici di base relazionati alle misure.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Possiamo poi porre l'attenzione su cosa accadrà se cambiamo la lunghezza del segmento, e.g. ponendo a 3 il valore di *x*. Questo può essere fatto facilmente con Geogebra ponendo *x* come variabile e così facendo potremo discutere il concetto di variabile, il ruolo delle lettere in gioco nelle diverse espressioni usate e sottolineare la potenza dell'algebra rispetto all'aritmetica.
Questo è realizzato facendo scorrere il valore della lunghezza del segmento associato ad *x* e facendo cambiare il corrispondente risultato di 2x, come mostrato in fig. 2b (durante l'animazione gli studenti possono seguire la traccia dei punti).

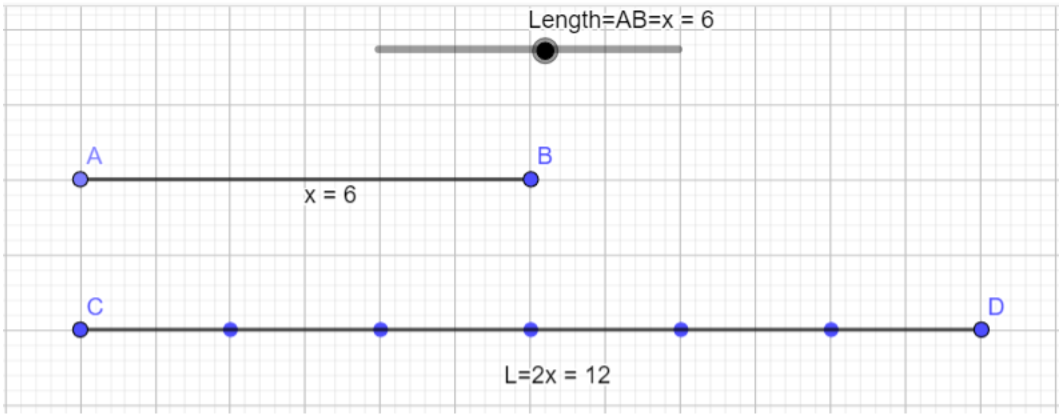

Fig. 2b *Costruzione di un segmento che ha lunghezza doppia del segmento AB facendo scorrere il valore della variabile x (Geogebra)*

Rappresentazione della relazione tra variabile ed espressione dipendente da tale variabile nel piano cartesiano e in tabella

Verrà quindi chiesto agli studenti stessi di provare a dare una definizione per concettualizzare il significato di variabile rispetto a parametro.
Ciò potrà essere di nuovo fatto mediante un approccio visuale, tracciando le due funzioni $y = 2x$ e $y = x^2$. Inizialmente, possiamo chiedere loro di tracciare per punti i grafici delle due funzioni sui loro quaderni e poi possiamo farlo con Geogebra.
Consideriamo una tabella che definisce la relazione tra la variabile "x" e le espressioni 2x e x^2.

x	**2x**	**x^2**
0		
1		
2		
3		

L'insegnante chiede agli studenti di calcolare il valore delle espressioni 2x e x^2 partendo dai valori della variabile indipendente "x"

x	**2x**	**x^2**
0	2·0=0	0·0=0
1	2·1=2	1·1=1
2	2·2=4	2·2=4

3	2·3=6	3·3=9

L'insegnante chiede agli studenti di disegnare le relazioni trovate sul piano cartesiano:

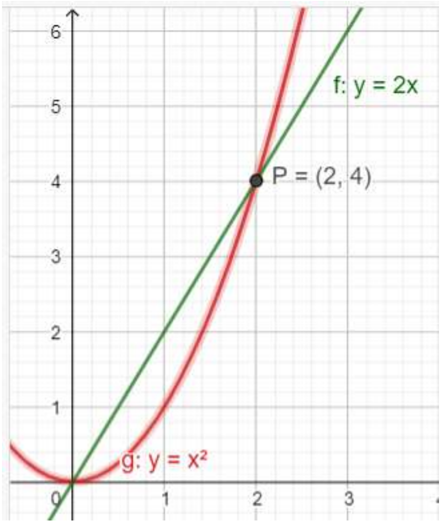

Fig. 3 *Grafici di* $y = 2x$ *e di* $y = x^2$ *(Geogebra)*

Il docente guida quindi la discussione circa la relazione tra *x* e le espressioni *2x* e x^2 sia attraverso la rappresentazione geometrica (nel piano cartesiano) sia mediante la relazione algebrica (sulla tabella) così gli studenti saranno in grado di passare da un codice ad un altro (processo di transcodifica).
A questo punto possiamo chiedere agli alunni di concentrarsi sul punto di intersezione dei due grafici per osservare quando avviene.

Un passo avanti successivo potrebbe essere di tracciare $y = kx$ variando il valore di *k* in Geogebra e aprendo una discussione sul ruolo che *k* gioca rispetto ad *x* (Fig. 4).

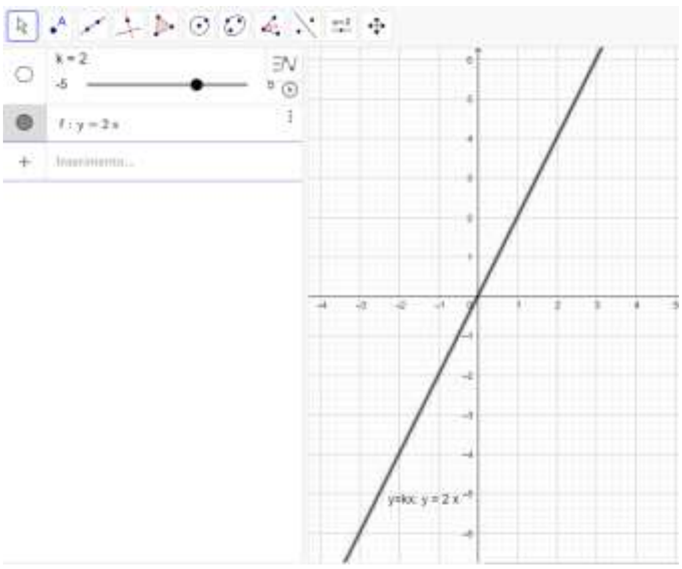

Fig. 4 *Grafico di* $y = kx$ *in Geogebra*

L’insegnante può chiedere: “Cosa pensate accadrà al grafico variando *k*”?
Dopo una discussione e alcuni tentativi realizzati dagli studenti sui loro quaderni, usando tabelle e riportando per punti i loro risultati sul piano cartesiano, l’insegnante mostrerà cosa accade cambiando il valore di *k* muovendo il punto sulla linea che rappresenta *k* in *Geogebra* (Fig.5)

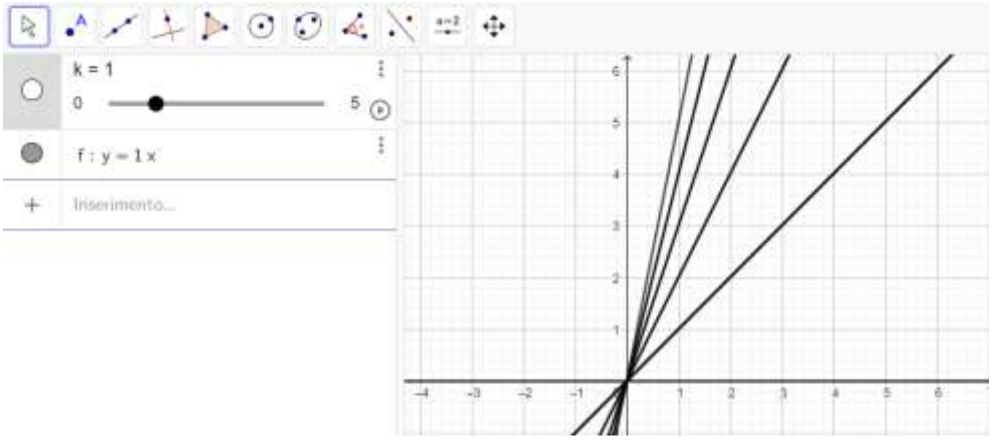

Fig. 5 *Grafico di* $y = kx$ *in Geogebra variando k e contemporaneamente tracciando il grafico*.

“Come interpretate cosa accade all’espressione algebrica 2x, 3x e così via?”

Possiamo chiedere agli studenti di tornare ai fogli di lavoro sui segmenti per mettere in evidenza come *k* influenzi il risultato e che tipo di relazione matematica esista tra la lunghezza finale ottenuta moltiplicando *x* per 2, 3 ecc. e *x* stessa.

Un ultimo e più approfondito dibattito potrebbe essere aperto con lo scopo di dare significato alle lettere nelle espressioni nonostante il fatto che siano usate spesso lettere uguali, proponendo di discutere il differente significato di *x* nelle due seguenti espressioni: *lunghezza =2x* e *2x=4,* identificando nella prima *x* come una variabile (e.g. la lunghezza dei diversi segmenti da duplicare) e nel secondo *x* come un valore incognito da determinare per sapere quale lunghezza deve essere associata al segmento per far sì che il suo doppio sia 4 e così via (qualunque sia la grandezza associata ad *x*).

Notiamo che gli approcci descritti promuovono differenti rappresentazioni (Principio 1 dei PUA o UDL) ed essi sono stati pensati per fare da mediatori tra i concetti matematici di *variabile, espressione dipendente* e del ruolo dei numeri in esse (*numeri come fattori o esponenti*) attraverso un modello dinamico spaziando dal punto di vista matematico a quello geometrico e quello grafico (Principio 2 dei PUA o UDL). La mediazione quindi avviene grazie al canale visuale e usando simboli verbali visuali (il linguaggio scritto) appena a valle della visualizzazione del senso di quegli stessi simboli. La costruzione dei concetti così realizzata può portare gli studenti, specialmente quelli con difficoltà di apprendimento in matematica (MLD), a trovare riferimenti esperenziali che si adattano ai loro stili cognitivi, fornendo diversi messi di coinvolgimento (Principio 3 dei PUA o UDL).
Ciò li porterà a ritrovare questo approccio nella loro memoria ogni volta che affronteranno una espressione algebrica che coinvolge situazioni simili, rendendoli più sicuri di riuscire.

In termini di valutazione formativa, la nostra progettazione attiva la strategia 2 (progettare discussioni in classe). Durante la discussione, vengono invece sperimentate le strategie 4 e 5, dato che gli studenti possono esprimere i loro dubbi diventando padroni del loro apprendimento o possono dare spiegazioni ai loro compagni diventando una risorsa per loro. L'insegnante e i pari possono fornire un *feedback* ad uno studente, attivando pertanto la strategia 3.

4. Discussione attraverso le linee guida UDL (PUA) delle attività su menzionate

Osserviamo che lo stesso obiettivo didattico di *Costruire una comprensione dei vari ruoli svolti dalle lettere e dai numeri in Algebra* è stato approcciato in modi diversi sulla base dei tre principi dei PUA o UDL (Tabella 7, in *rosso* i nostri commenti per illustrare i legami tra i principi e le nostre attività).

Tabella 7: Analisi delle attività attraverso la Tabella dei principi dei PUA o UDL.

Coinvolgimento	*Rappresentazione*	*Azione & Espressione*
Catturare l'interesse Ottimizzare le scelte individuali e l'autonomia Ottimizzare rilevanza, valore e autenticità Minimizzare minacce e distrazioni	***Percezione*** Offrire modi di personalizzare la visualizzazione delle informazioni Offrire alternative di sollecitazioni uditive Offrire alternative per le informazioni visive *Diversi registri attraverso cui sono veicolate le informazioni (visuale, visuale e dinamico; simbolico)*	***Azioni Fisiche*** : Variare i metodi di risposta e di movimento Ottimizzare l'accesso a strumenti e tecnologie assistive
Sostenere sforzo e persistenza Rafforzare l'importanza degli scopi e degli obiettivi Variare richieste e risorse per ottimizzare la sfida Promuovere collaborazione e condivisione Accrescere i *feedback* orientati alla padronanza dell'apprendimento I *feedback* orientati supportano il coinvolgimento e la motivazione rispetto all'elaborazione della soluzione per il compito da svolgere.	***Linguaggi e Simboli*** Precisare il lessico e i simboli Precisare la sintassi e la struttura Offrire linguaggi alternativi e simboli per decodificare l'informazione e lavorare su di essa *Ciò è promosso grazie all'azione dinamica dovuta all'uso del software di geometria dinamica* Illustrare attraverso molteplici mezzi *Ciò è promosso grazie all'attività di transcodifica tra differenti registri di*	***Espressione e Comunicazione*** Usare molteplici mezzi di comunicazione Usare molteplici mezzi di costruzione e composizione Costruire fluidità nella comunicazione mediante livelli di supporto graduali per la pratica e la prestazione Usare differenti registri per comunicare *Nelle attività sono forniti degli approcci manipolativi. Per esempio spostare un punto mobile può aiutare a visualizzare che un parametro può assumere diversi valori che influenzano il*

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

	rappresentazione Supportare la decodifica di testo, notazioni e simboli matematici *Questo è promosso attraverso la visualizzazione di registri differenti (per esempio, visualizzazione e interpretazione geometrica, relazioni tra operazioni e diversi ruoli svolti dagli stessi numeri e lettere; una variabile come punto mobile denominato x che rappresenta una lunghezza)*	*grafico nel diagramma o una variabile può avere valori diversi che influenzano il risultato di una espressione*
Auto-regolamentazione Promuovere prospettive e convinzioni che ottimizzano la motivazione Facilitare capacità personali e strategie Sviluppare autovalutazione e riflessione *Le strategie della valutazione formativa, come discusso nel paragrafo 2, possono aiutare l'auto-valutazione e la riflessione. Più specificatamente, l'insegnante può fornire diversi tipi di feedback*	***Comprensione*** Attivare o fornire la conoscenza del contesto Evidenziare percorsi, caratteristiche fondamentali, le grandi idee e le relazioni Guidare la visualizzazione e i processi delle conoscenze Massimizzare trasferimento e generalizzazione delle conoscenze *Percezione, linguaggio e simboli, comprensione (Costruire conoscenze da usare, conoscenze che sono accessibili per prendere decisioni future, non dipende meramente dalle informazioni percepite, ma dalle competenze attivate dai processi delle conoscenze)*	***Funzioni Esecutive*** *Guidare verso la definizione di obiettivi appropriati* *L'uso di artefatti può anche essere un supporto per la memoria. Gli artefatti guidano il processo di inchiesta degli studenti, fornendo feedback ai loro processi (per esempio attraverso la visualizzazione geometrica delle espressioni algebriche)* *Supportare lo sviluppo di pianificazioni e strategie* *Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse*

Ciò consente agli studenti di costruire il significato delle nozioni algebriche in gioco.

5. Riferimenti bibliografici

[1] Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31.

[2] Cusi, A., Morselli, F.,& Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. ZDM Mathematics Education.

[3] Cusi, A., Morselli, F.,& Sabena, C. (2018). Enhancing formative assessment in mathematical class discussion: a matter of feedback. Proceedings of CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01949286, pp. 3460-3467.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

[4] Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115–141.

[5] Robotti E., Baccaglini-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In *Innovation & Technology*. Series Mathematics Education in the Digital Era, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.

[6] Villani V., Berni M. (2014). Cominciamo da zero, Pitagora Editrice Bologna.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.