



**IO1.G – STRUMENTO D' INTERVENTO**

## Comprendere il significato dei termini matematici.

### 1. Introduzione

La proposta dello strumento d' intervento è di comprendere meglio il linguaggio matematico attraverso una serie di attività che include l'interpretazione di problemi reali, anche attraverso l' utilizzo di un' applicazione interattiva, la discussione di problemi in classe con l'insegnante e tra gli studenti.

Allo scopo di sviluppare un insieme di attività educative volte a comprendere il significato di concetti aritmetici migliorando le capacità di ragionamento, si rimanda ad alcuni quadri teorici che verranno descritti nella sessione 2.

Nella sessione 3 viene descritta la progettazione delle attività educative. In particolare: le attività rivolte alla classe, la finalità didattica delle attività, l'area cognitiva, il dominio matematico di interesse e gli oggetti matematici nelle aree di difficoltà individuate attraverso il questionario B2.

### 2. Modello teorico di riferimento

I riferimenti teorici che ci hanno aiutato a progettare le seguenti attività sono:

1. I principi UDL (Tabella 3), un modello concepito specificamente per progettare attività educative inclusive (<http://udlguidelines.cast.org/>) sono organizzati nella seguente tabella:

[Tabella 3: principi e linee guida UDL](#)

	Fornire molteplici mezzi di IMPEGNO	Fornire molteplici mezzi di RAPPRESENTANZA	Fornire molteplici mezzi di AZIONE ed ESPRESSIONE
	Reti efficaci: il "PERCHÉ" dell'apprendimento	Reti di riconoscimento - Il "COSA" dell'apprendimento	Reti strategiche - Il "COME" dell'apprendimento
Accesso	Fornire alternative per <b>Interesse di reclutamento:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ottimizzare la scelta e l'autonomia individuali</li> <li>Ottimizzazione della pertinenza, del valore e dell'autenticità</li> <li>Riduci al minimo le minacce e le distrazioni</li> </ul>	Fornire alternative per <b>Percezione:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Offrire la possibilità di personalizzare la visualizzazione delle informazioni</li> <li>Offrire alternative per le informazioni uditive</li> <li>Offrire alternative per le informazioni visive</li> </ul>	Fornire alternative per <b>Azioni fisiche:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Variare il metodo di risposta e navigazione</li> <li>Ottimizzare l'accesso a strumenti e tecnologie assistive</li> </ul>
Costruire	Fornire alternative per <b>Sostenere lo sforzo e la persistenza:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Aumentare l'importanza degli scopi e degli obiettivi</li> <li>Variare le richieste e le risorse per ottimizzare la sfida</li> <li>Favorire la collaborazione e la comunità</li> <li>Aumentare il feedback orientato alla padronanza degli apprendimenti</li> </ul>	Fornire alternative per <b>Lingua e simboli:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Chiarire il vocabolario e i simboli</li> <li>Chiarire la sintassi e la struttura</li> <li>Supporta la decodifica di testo, notazione matematica e simboli</li> <li>Promuovere la comprensione in tutte le lingue</li> <li>Illustrare attraverso molteplici media</li> </ul>	Fornire alternative per <b>Espressione e comunicazione:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizzare più supporti per la comunicazione</li> <li>Utilizzare più strumenti per la costruzione e la composizione</li> <li>Costruire fluidità con livelli graduali di supporto per la pratica e le prestazioni</li> </ul>





Project number: 2018-1-1102-KA201-048274

Interiorizzare	Fornire alternative per Autoregolamentazione: <ul style="list-style-type: none"> <li>Promuovere aspettative e convinzioni che ottimizzano la motivazione</li> <li>Facilitare le capacità e le strategie di risoluzione personali</li> <li>Sviluppare l'autovalutazione e la riflessione</li> </ul>	Fornire alternative per Comprensione: <ul style="list-style-type: none"> <li>Attivare o fornire conoscenze di base</li> <li>Evidenziare modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni</li> <li>Guidare l'elaborazione e la visualizzazione delle informazioni</li> <li>Massimizzare il trasferimento e la generalizzazione</li> </ul>	Fornire alternative per Funzione esecutiva: <ul style="list-style-type: none"> <li>Guidare la definizione degli obiettivi appropriati</li> <li>Supportare la pianificazione e lo sviluppo della strategia</li> <li>Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse</li> <li>Migliorare la capacità di monitorare i progressi</li> </ul>
	Studenti esperti che sono....		
	Deciso e motivato	Pieno di risorse e competente	Strategico e orientato agli obiettivi

Il Centro per le Speciali Tecnologie Applicate (CAST) ha sviluppato un quadro completo attorno al concetto di Universal Design for Learning (UDL), con l'obiettivo di concentrare la ricerca, lo sviluppo e la pratica educativa sulla comprensione della diversità e sulla facilitazione dell'apprendimento. L'UDL include una serie di Principi, articolati in *Linee guida e punti di controllo*<sup>1</sup>. La ricerca alla base della struttura di UDL è che "gli studenti sono molto variabili nella loro risposta all'istruzione. [...]"

Pertanto, l'UDL si concentra su queste differenze individuali come elemento importante per comprendere e progettare istruzioni efficaci per l'apprendimento.

A questo scopo, l'UDL propone tre Principi fondamentali: 1) fornire molteplici mezzi di rappresentazione, 2) fornire molteplici mezzi di azione ed espressione, 3) fornire molteplici mezzi di coinvolgimento. In particolare, le linee guida all'interno del primo principio si riferiscono ai mezzi di percezione coinvolti nel ricevere determinate informazioni e di "comprensione" delle informazioni ricevute. Le linee guida all'interno del secondo principio tengono conto dell'elaborazione di informazioni/idee e della loro espressione. Infine, le linee guida all'interno del terzo principio trattano il dominio dell'"affetto" e della "motivazione", anch'essi essenziali in ogni attività educativa.

Per le nostre analisi, ci concentreremo in particolare su linee guida specifiche all'interno dei tre Principi<sup>2</sup>.

Le linee guida all'interno del Principio 1 (*fornire molteplici mezzi di rappresentazione*), suggeriscono di proporre diverse alternative di percezione e di offrire supporto per la decodifica di notazioni e simboli matematici. Inoltre, le linee guida suggeriscono l'importanza di fornire alternative per la comprensione evidenziando modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni tra nozioni matematiche. Inoltre, le linee guida del Principio 2 (forniscono molteplici mezzi di azione ed espressione) suggeriscono di offrire diverse alternative di espressione e comunicazione a supporto della pianificazione e dello sviluppo della strategia. Infine, le linee guida del Principio 3 mostrano come determinate attività possono reclutare l'interesse degli studenti, ottimizzando la scelta e l'autonomia individuali e riducendo al minimo le minacce e le distrazioni.

Per questo strumento si concentrerà prima di tutto sulla rappresentazione, comprese le linee guida Percezione e Comprensione. Le linee guida suggeriscono e propongono diverse opzioni per la percezione e offrono supporto per la decodifica della percezione e della comprensione. In particolare si propongono di offrire modi per personalizzare la visualizzazione delle informazioni. Per quanto riguarda la comprensione, le linee guida prestano attenzione nell'attivare o fornire conoscenze di base, evidenziare modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni, guidare l'elaborazione e la visualizzazione delle informazioni e massimizzare il trasferimento e la generalizzazione. In particolare per quanto riguarda la massimizzazione del trasferimento e della generalizzazione: "Tutti gli studenti devono essere in grado di generalizzare e trasferire il loro apprendimento in nuovi contesti. Gli studenti variano nella quantità di strutture di cui hanno bisogno per la memoria e il trasferimento al fine di migliorare la loro capacità di accedere al loro apprendimento precedente".

Quindi, per quanto riguarda l'Azione e l'Espressione, che include anche le linee guida in "Variare i metodi di risposta e navigazione", è adatto l'uso di oggetti fatti a mano.

Nella sezione 4 si analizzerà un esempio di attività classificandolo in base al tipo di apprendimento matematico per cui è progettato e all'area cognitiva interessata. Mostrerò come questo esempio è stato progettato sui principi UDL al fine di renderli inclusivi ed efficaci per superare le difficoltà matematiche individuate attraverso il questionario B2. Viene incoraggiata la discussione in classe per comprendere meglio il significato dei termini

<sup>1</sup> Per una lista completa di questi principi, linee guida a punti di controllo a una descrizione più vasta delle attività di CAST, visitare il sito <http://www.udlcenter.org/>

<sup>2</sup> Gli elementi sono presi dall'elenco interattivo su <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-1102-KA201-048274

utilizzati. Inoltre, viene utilizzata la divisione in piccoli gruppi eterogenei per elaborare nuovi problemi, che si basano su situazioni reali, che verranno poi condivise con il resto della classe. Questo per incoraggiare una migliore comprensione di ciò che è stato raggiunto e per un maggiore confronto tra pari. Si richiede poi di elaborare un'attività personale a casa come mezzo di riflessione personale e metacognizione di quanto appreso, che sarà poi discusso in classe con l'insegnante e gli altri studenti. Ciò trova sostegno nell'articolo di Di Martino su "Risoluzione dei problemi e argomentazione matematica" che afferma che "La risoluzione dei problemi e l'argomentazione sono abilità chiave nell'educazione. L'educazione matematica a scuola dovrebbe dare un forte contributo allo sviluppo di queste abilità. La promozione della risoluzione e dell'argomentazione matematica sono condivisi secondo numerosi standard internazionali". Inoltre, Mayer afferma che "un'importante implicazione didattica che al centro della metacognizione è che le abilità di problem solving dovrebbero essere apprese nel contesto di situazioni realistiche".

### 3. Progettazione

#### 3.1. Difficoltà rilevate attraverso il questionario B2

Rileviamo difficoltà nei seguenti quesiti del questionario B2:

**Q3Ar1.** Risolvi i seguenti problemi:

- a) Stella ha lavato 5 paia di calzini in lavatrice. Quando è andata a riprenderli mancava un calzino. Quanti calzini ha tirato fuori Stella dalla lavatrice?
- b) Peter ha 40 carte. Se Alex perde 10 carte, ne avrà tante quante ne ha Peter. Quante carte ha Alex?
- c) Una famiglia ha 3 figli. Ogni bambino della famiglia beve 2 bicchieri di latte ogni giorno. Quanti bicchieri di latte berrà la famiglia dopo che sono trascorsi 10 giorni?
- d) Per realizzare 4 borsette lavorate all'uncinetto in cotone, sono necessari 6 gomitoli di cotone. Quanti gomitoli servono per realizzare 20 borsette?
- e) Sara ha ricevuto 24 euro in regalo, Marta ha ricevuto 6 euro in meno. Quanti euro hanno in totale le due ragazze?

**Q3Ar2.** Rappresenta in forma algebrica il seguente gioco: "Pensa a un numero, raddoppialo, aggiungi 4, dividi per 2, rimuovi il numero che pensavi"

Se esegui il gioco, ottieni 2 come risultato: perché?

La difficoltà riguarda il ragionamento matematico e la risoluzione di problemi relativi al calcolo aritmetico. Inoltre, nella seconda domanda c'è una difficoltà nel tradurre alcuni termini matematici come il doppio, l'aggiunta, la sottrazione in espressioni matematiche e nell'uso conseguente delle variabili.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-1102-KA201-048274

### 3.2 Area cognitiva e dominio matematico di interesse

L'area di difficoltà identificata attraverso il questionario B2 è relativa al dominio dell'Aritmetica e l'area cognitiva coinvolta è il Ragionamento (Tabella 1).

Tabella 1: Le difficoltà rilevate sono legate al dominio cognitivo del Ragionamento nel dominio dell'Aritmetica

	Aritmetica	Geometria	Algebra
Memoria			
Ragionamento	<p><b>Q3Ar1. Risolvi i seguenti problemi:</b></p> <p>a) Stella ha lavato 5 paia di calzini in lavatrice. Quando è andata a riprenderli mancava un calzino. Quanti calzini ha tirato fuori Stella dalla lavatrice?</p> <p>b) Peter ha 40 carte. Se Alex perde 10 carte, ne avrà tante quante ne ha Peter. Quante carte ha Alex?</p> <p>c) Una famiglia ha 3 figli. Ogni bambino della famiglia beve 2 bicchieri di latte ogni giorno. Quanti bicchieri di latte berrà la famiglia dopo che sono trascorsi 10 giorni?</p> <p><b>Q3Ar2. Rappresenta in forma algebrica il seguente gioco: "Pensa a un numero, raddoppialo, aggiungi 4, dividi per 2, rimuovi il numero che pensavi"</b></p> <p><b>Se esegui il gioco, ottieni 2 come risultato: perché?</b></p>		
Visuo-spaziale			

### 3.3 Obiettivi educativi

Gli obiettivi educativi riguardano il miglioramento delle capacità di ragionamento nel campo dell'aritmetica. Partendo infatti da alcuni semplici esempi di vita quotidiana in cui vengono utilizzati termini matematici, è poi possibile analizzare situazioni più complesse in cui vengono utilizzati vari strumenti matematici come le parentesi all'interno di espressioni. Quindi è possibile generalizzare la risoluzione di problemi aritmetici utilizzando le variabili.

### 3.4 A chi è rivolto allo studente o alla classe

Lo strumento di intervento può essere rivolto a tutta la classe, cercando una discussione in classe positiva da parte degli studenti. È possibile immaginare che dalla discussione possano scaturire molti casi diversi e che si possa sviluppare un nuovo interesse negli studenti. Ogni giorno infatti usiamo parole come doppio, triplo e anche inconsapevolmente traduciamo queste parole in operazioni ben definite.

### 3.5 Attività educative: lo strumento di intervento



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-1102-KA201-048274

Qui presentiamo una serie di attività educative pensate per la classe. La progettazione di tali attività si basa sull'uso dei principi UDL al fine di rendere le attività inclusive. In particolare, forniamo molteplici mezzi di rappresentanza, che promuovono sia il coinvolgimento degli studenti che la loro azione ed espressione.

Lavoro dell'insegnante con l'intero gruppo classe:

L'insegnante interagisce con gli alunni/e analizzando il significato di alcuni termini e insieme al gruppo classe costruisce una tabella in cui viene specificata l'operazione matematica relativa al termine utilizzato.

Esempio di tabella:

Termine utilizzato	Operazione matematica	Esempio
Doppio	Moltiplica il numero per due= $2 \cdot N$ N=numero	doppio di 5 = $5 \cdot 2 = 10$
Triplo	Moltiplica il numero per tre $= 3 \cdot N$	triplo di 5 = $5 \cdot 3 = 15$
Metà	Dividi il numero per due $= N : 2 = N/2$	metà di 6 = $6 : 2 = 6/2 = 3$
Quadrato	Moltiplica il numero per se stesso $= N \cdot N = N^2$	Il quadrato di 5 = $5 \cdot 5 = 25$
Cubo	Moltiplica il numero per se stesso tre volte $= N \cdot N \cdot N = N^3$	Il cubo di 5 = $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

L'insegnante invita gli studenti ad aggiungere più termini e creare una tabella più completa. Inoltre, introduce situazioni in cui devono essere usate le parentesi. Ad esempio: moltiplica un numero per la somma dello stesso numero con il suo triplo e altri problemi analoghi. Poi il docente presenta una situazione reale, un semplice problema, per esempio: Luca ha 200 euro, ne spende la metà acquistando libri e poi spende un quarto dei soldi rimanenti acquistando CD. Se Luca spende altri 10 € per una pizza e un drink, quanti soldi gli restano? Gli studenti commentano insieme il significato delle parole e le esprimono in linguaggio matematico.

L'insegnante divide la classe in piccoli gruppi chiedendo che ogni gruppo formuli almeno tre problemi con esempi di situazioni reali, convertendoli poi in linguaggio matematico. Segue poi la discussione sul lavoro creato dai vari gruppi, in cui vengono condivisi i significati e si discutono i vari casi, evidenziando le difficoltà incontrate. Infine, i problemi vengono trasformati in espressioni matematiche. Successivamente viene assegnato un lavoro in cui ogni studente deve pensare ad almeno due problemi di situazioni che verranno trasformate in espressioni matematiche. Questi problemi verranno condivisi con la classe e commentati.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



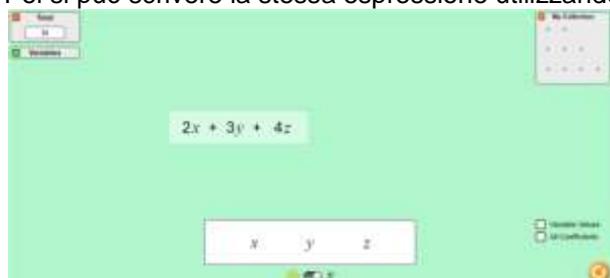
Project number: 2018-1-1102-KA201-048274

Costruzione di un'espressione attraverso l' utilizzo di un'applicazione interattiva:

L'insegnante può utilizzare simulazioni interattive Phet. In particolare, è possibile utilizzare l'applicazione "Espressioni". Questa applicazione è divisa in quattro sezioni. Nella sezione di base è possibile costruire espressioni con monete, cambiandone il numero e verificandone il valore.

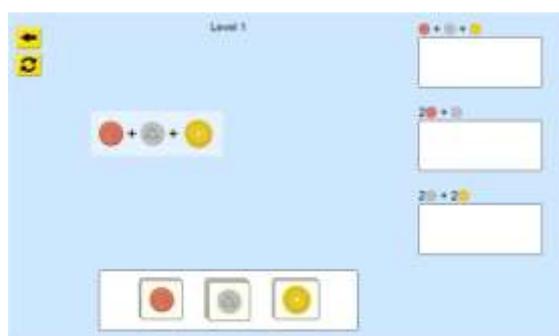


Poi si può scrivere la stessa espressione utilizzando le variabili



In questo modo è possibile costruire, attraverso un'applicazione interattiva, oggetti riflettendo sul loro valore, questa modalità ha sicuramente un'utilità maggiore per gli studenti MLD, perché possono dare agli oggetti un significato visivo e una migliore comprensione del significato delle espressioni.

Nella sezione gioco sono presenti molti livelli di difficoltà crescente in cui è necessario riprodurre le espressioni visualizzate, utilizzando inizialmente le monete e poi le variabili. Inoltre, quando l'esercizio è ben eseguito, viene assegnato un punteggio che consente di passare al livello successivo.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-102-KA201-048274



#### 4. Discussione attraverso le linee guida UDL sulle attività sopra menzionate

Osservo che lo stesso scopo educativo di costruire il significato di “ragionamento” in aritmetica viene affrontato in modi diversi agendo sui tre principi dell'UDL (Tabella 7, in rosso i miei commenti per illustrare la connessione tra i principi e le nostre attività).

Tabella 7: Analisi delle attività attraverso la Tabella dei principi UDL.

Impegno	Rappresentazione	Azione ed espressione
<b>Interesse di reclutamento</b>	<b>Percezione</b> Offrire modi per personalizzare la visualizzazione delle informazioni Offri alternative per le informazioni uditive Offri alternative per le informazioni visive <b>Diversi registri attraverso i quali le informazioni vengono comunicate (interattivo; visivo; simbolico)</b>	<b>Azioni Fisiche</b> Varia i metodi di risposta e di navigazione Ottimizza l'accesso agli strumenti e alle tecnologie
<b>Sforzo di sostegno e Persistenza</b> <b>Il lavoro di gruppo e la discussione con la classe sono funzionali allo scopo di favorire la collaborazione e la creazione di una comunità. Durante la discussione in classe, l'insegnante e i compagni possono fornire dei feedback</b>	<b>Linguaggio e simboli</b> Chiarire vocaboli e simboli Chiarire sintassi e struttura Offrire un linguaggio alternativo per decifrare le informazioni e lavorarci sopra. Supportare la decodifica del testo, la notazione matematica ed i simboli <b>Questo è favorito dall' uso di una tabella che</b>	<b>Comunicazione di espressione</b> <b>Il lavoro di discussione di un gruppo e/o della classe può mostrarsi efficiente se si riescono a individuare “differenti mentori (cioè insegnanti / tutor che usano diversi approcci per motivare, guidare, dare feedback o informazioni)” e se si forniscono “feedback differenziati (ad</b>



Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-1102-KA201-048274

<b>orientati alla padronanza degli apprendimenti.</b>	<b>specifica i significati dei principali termini e le relative operazioni matematiche.</b>	<b>esempio un feedback risulta accessibile perché viene personalizzato al soggetto a cui è rivolto)".</b>
<b>Autoregolamentazione</b> <b>I feedback di insegnanti e compagni possono promuovere un'ulteriore autoregolamentazione.</b>	<b>Comprensione</b>  Attivare o fornire conoscenze di base.  Evidenzia modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni  Guida l'elaborazione e la visualizzazione delle informazioni	<b>Funzioni esecutive</b>

## Bibliografia

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. *ZDM Mathematics Education*.

Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.

Robotti E., Baccaglini-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In *Innovation & Technology. Series Mathematics Education in the Digital Era*, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.

Marcheschi, A. (2014). Un'indagine sulle difficoltà argomentative nell'Ambito Numeri degli studenti a livello di primo biennio della scuola superiore. Tesi di Laurea, Università degli studi di Pisa, Italia.

Mayer R.E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science*, 26, 49-63.

Pietro Di Martino, Problem solving e argomentazione matematica, 2017 , 23 - 37.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.