



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

## STRUMENTO DI INTERVENTO

# *Comprendere il significato del volume solido migliorando le abilità visive-spaziali*

### 1. Introduzione

Al fine di sviluppare un insieme di attività didattiche volte a rilevare il significato di volume in un solido migliorando le capacità visive-spaziali, si rimanda ad alcuni modelli teorici che verranno descritti nel paragrafo 2.

Nel paragrafo 3 viene descritto il progetto delle attività educative. In particolare: le attività rivolte alla classe, la finalità didattica delle attività, l'area cognitiva e l'ambito matematico di interesse e gli oggetti matematici nelle aree di difficoltà individuate attraverso il questionario B2.

### 2. Modello teorico di riferimento

I riferimenti teorici che ci hanno aiutato a progettare le seguenti attività sono:

#### 1) Principi di progettazione universale per l'apprendimento, Universal Design for Learning (UDL)

I Principi UDL (Tabella 3 3), un modello concepito specificamente per progettare attività educative inclusive (<http://udlguidelines.cast.org/>) sono organizzati nella seguente tabella:

Tabella 3: principi e linee guida UDL

	Fornire molteplici mezzi di IMPEGNO	Fornire molteplici mezzi di RAPPRESENTANZA	Fornire molteplici mezzi di AZIONE ed ESPRESSIONE
	Reti efficaci: il "PERCHÉ" dell'apprendimento	Reti di riconoscimento - Il "COSA" dell'apprendimento	Reti strategiche - Il "COME" dell'apprendimento
Accesso	Fornire alternative per <b>Interesse di reclutamento:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ottimizzare la scelta e l'autonomia individuali</li> <li>Ottimizzazione della pertinenza, del valore e dell'autenticità</li> <li>Riduci al minimo le minacce e le distrazioni</li> </ul>	Fornire alternative per <b>Percezione:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Offrire la possibilità di personalizzare la visualizzazione delle informazioni</li> <li>Offrire alternative per le informazioni uditive</li> <li>Offrire alternative per le informazioni visive</li> </ul>	Fornire alternative per <b>Azioni fisiche:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Variare il metodo di risposta e navigazione</li> <li>Ottimizzare l'accesso a strumenti e tecnologie assistive</li> </ul>
Costruire	Fornire alternative per <b>Sostenere lo sforzo e la persistenza:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Aumentare l'importanza degli scopi e degli obiettivi</li> <li>Variare le richieste e le risorse per ottimizzare la sfida</li> <li>Favorire la collaborazione e la comunità</li> <li>Aumentare il feedback orientato al master</li> </ul>	Fornire alternative per <b>Lingua e simboli:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Chiarire il vocabolario e i simboli</li> <li>Chiarire la sintassi e la struttura</li> <li>Supporta la decodifica di testo, notazione matematica e simboli</li> <li>Promuovere la comprensione in tutte le lingue</li> <li>Illustrare attraverso molteplici media</li> </ul>	Fornire alternative per <b>Espressione e comunicazione:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizzare più supporti per la comunicazione</li> <li>Utilizzare più strumenti per la costruzione e la composizione</li> <li>Costruire fluidità con livelli graduali di supporto per la pratica e le prestazioni</li> </ul>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Interiorizzare	<b>Fornire alternative per Autoregolamentazione:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Promuovere aspettative e convinzioni che ottimizzano la motivazione</li> <li>Facilitare le capacità e le strategie di risoluzione personali</li> <li>Sviluppare l'autovalutazione e la riflessione</li> </ul>	<b>Fornire alternative per Comprensione:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Attivare o fornire conoscenze di base</li> <li>Evidenziare modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni</li> <li>Guidare l'elaborazione e la visualizzazione delle informazioni</li> <li>Massimizzare il trasferimento e la generalizzazione</li> </ul>	<b>Fornire alternative per Funzione esecutiva:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Guidare la definizione degli obiettivi appropriati</li> <li>Supportare la pianificazione e lo sviluppo della strategia</li> <li>Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse</li> <li>Migliorare la capacità di monitorare i progressi</li> </ul>
	<b>Studenti esperti</b> che sono...		
	Deciso e motivato	Pieno di risorse e competente	Strategico e orientato agli obiettivi

Il Centro per le Speciali Tecnologie Applicate (CAST) ha sviluppato un quadro completo attorno al concetto di Universal Design for Learning (UDL), con l'obiettivo di concentrare la ricerca, lo sviluppo e la pratica educativa sulla comprensione della diversità e sulla facilitazione dell'apprendimento. L'UDL include una serie di Principi, articolati in *Linee guida e punti di controllo*<sup>1</sup>. La ricerca alla base della struttura di UDL è che "gli studenti sono molto variabili nella loro risposta all'istruzione. [...] " Pertanto, l'UDL si concentra su queste differenze individuali come elemento importante per comprendere e progettare istruzioni efficaci per l'apprendimento.

A questo scopo, l'UDL propone tre Principi fondamentali: 1) fornire molteplici mezzi di rappresentazione, 2) fornire molteplici mezzi di azione ed espressione, 3) fornire molteplici mezzi di coinvolgimento. In particolare, le linee guida all'interno del primo principio si riferiscono ai mezzi di percezione coinvolti nel ricevere determinate informazioni e di "comprensione" delle informazioni ricevute. Le linee guida all'interno del secondo principio tengono conto dell'elaborazione di informazioni/idee e della loro espressione. Infine, le linee guida all'interno del terzo principio trattano il dominio dell'"affetto" e della "motivazione", anch'essi essenziali in ogni attività educativa.

Per le nostre analisi, ci concentreremo in particolare su linee guida specifiche all'interno dei tre Principi<sup>2</sup>.

Le linee guida all'interno del Principio 1 (*fornire molteplici mezzi di rappresentazione*), suggeriscono di proporre diverse alternative di percezione e di offrire supporto per la decodifica di notazioni e simboli matematici. Inoltre, le linee guida suggeriscono l'importanza di fornire alternative per la comprensione evidenziando modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni tra nozioni matematiche. Di conseguenza, proporremo l'uso del software AlNuSet per guidare l'elaborazione, la visualizzazione e la manipolazione delle informazioni, al fine di massimizzare il trasferimento e la generalizzazione.

Inoltre, le linee guida del Principio 2 (forniscono molteplici mezzi di azione ed espressione) suggeriscono di offrire diverse alternative di espressione e comunicazione a supporto della pianificazione e dello sviluppo della strategia. Infine, le linee guida del Principio 3 mostrano come determinate attività possono reclutare l'interesse degli studenti, ottimizzando la scelta e l'autonomia individuali e riducendo al minimo le minacce e le distrazioni.

Nella sezione 4 presenteremo esempi di attività, discutendo il tipo di apprendimento matematico a cui si rivolgono e l'area cognitiva che supportano. Mostriamo come questi esempi sono stati progettati all'interno della cornice dei principi UDL al fine di renderli inclusivi ed efficaci per superare le difficoltà matematiche individuate attraverso il questionario B2.

## 2) Modelli teorici per l'apprendimento del ragionamento geometrico

<sup>1</sup> Per una lista completa di questi principi, linee guida a punti di controllo a una descrizione più vasta delle attività di CAST, visitare il sito <http://www.udlcenter.org/>

<sup>2</sup> Gli elementi sono presi dall'elenco interattivo su <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Dal gruppo di lavoro sulla geometria, relazione dell'incontro al King's College, Università di Londra, 28 febbraio 1998 (<https://eprints.soton.ac.uk/41308/>): "Con crescente interesse nella geometria è importante essere chiari sulla natura del ragionamento geometrico e su come si sviluppa. Questo articolo fornisce una panoramica di tre quadri teorici per l'apprendimento del ragionamento geometrico: il modello di pensiero in geometria di van Hiele, la teoria dei concetti figurativi di Fischbein e il modello cognitivo del ragionamento geometrico di Duval. Ciascuno di questi quadri fornisce risorse teoriche per supportare la ricerca sullo sviluppo del ragionamento geometrico negli studenti e gli aspetti correlati di visualizzazione e costruzione. Questa panoramica conclude che sono ancora necessarie molte ricerche sul profondo processo di sviluppo e apprendimento della visualizzazione e del ragionamento".

Il modello di pensiero in geometria di van Hiele fornisce la seguente descrizione dei diversi livelli, basata sulle loro traduzioni del lavoro di van Hiele dall'originale olandese:

- Livello 0: lo studente identifica, nomina, confronta e opera su figure geometriche;
- Livello 1: lo studente analizza le figure in termini di componenti e relazioni tra componenti e scopre proprietà / regole empiricamente;
- Livello 2: lo studente interrompe logicamente proprietà / regole scoperte in precedenza fornendo o seguendo argomenti informali;
- Livello 3: lo studente dimostra i teoremi in modo deduttivo e stabilisce le interrelazioni tra reti di teoremi;
- Livello 4: lo studente stabilisce teoremi in diversi sistemi di postulazione e analizza / confronta questi sistemi.

Nella teoria dei concetti figurativi, Fischbein (1993) osserva che mentre una figura geometrica come un quadrato può essere descritta come avente proprietà intrinsecamente concettuali (in quanto è controllata da una teoria), non è solo un concetto, è un'immagine pure. [...] Quindi, sostiene Fischbein, tutte le figure geometriche rappresentano costrutti mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurative. [...] Egli sostiene che la geometria è un campo in cui è necessario che immagini e concetti interagiscano, ma che dal punto di vista dello studente può esserci una tensione tra i due.

Duval affronta la geometria da un punto di vista cognitivo e percettivo. In questo quadro identifica quattro tipi di ciò che chiama "apprensione cognitiva":

1. *apprensione percettiva*: questo è ciò che si riconosce a prima vista; forse, ad esempio, sotto-figure che non sono necessariamente rilevanti per la costruzione della figura geometrica.
2. *apprensione sequenziale*: è usata quando si costruisce una figura o quando si descrive la sua costruzione. In questo caso, le unità figurative non dipendono dalla percezione ma da vincoli matematici e tecnici (in quest'ultimo caso potrebbero essere righello e compasso, o forse le primitive nel software del computer).
3. *apprensione discorsiva*: il riconoscimento percettivo dipende dalle affermazioni discorsive perché le proprietà matematiche rappresentate in un disegno non possono essere determinate unicamente attraverso l'apprendimento percettivo, alcune devono prima essere date attraverso la parola.
4. *apprensione operativa*: si tratta di operare sulla figura, mentalmente o fisicamente, che può dare una visione della soluzione di un problema.

Mentre quanto sopra si riferisce al lavoro con i disegni geometrici, Duval (1998 p38-39) è andato oltre nel proporre che il ragionamento geometrico coinvolge tre tipi di processi cognitivi che soddisfano specifiche funzioni epistemologiche. Questi processi cognitivi sono:

- processi di visualizzazione, ad esempio la rappresentazione visiva di un'affermazione geometrica, o l'esplorazione euristica di una situazione geometrica complessa;
- processi di costruzione (utilizzando strumenti);
- processi di ragionamento - in particolare processi discorsivi per l'estensione della conoscenza, per la spiegazione, per la prova.

Le conclusioni dell'articolo sono: "la panoramica di cui sopra dei tre quadri abbastanza ben sviluppati per descrivere e comprendere lo sviluppo del ragionamento geometrico ha lo scopo di fornire una breve idea delle risorse teoriche disponibili che possono essere utili nella ricerca in quest'area. Sottolinea inoltre la complessità cognitiva della geometria.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Come conclude Duval: *sono ancora necessarie molte ricerche sul profondo processo di sviluppo e l'apprendimento della visualizzazione e del ragionamento*".

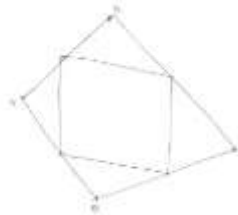
Con l'idea di questi riferimenti vengono costruiti alcuni strumenti molto semplici riguardanti le abilità visivo-spaziali in Geometria.

### 3) Abilità visivo-spaziali e geometria: una prima proposta di un quadro teorico per interpretare i processi di visualizzazione

L'introduzione del documento [2] è:

*Proponiamo un'interpretazione teorica delle capacità visivo-spaziali, classificate nel campo della psicologia cognitiva, nel dominio della geometria euclidea. In questa interpretazione facciamo uso della teoria dei concetti figurativi di Fischbein e delle apprensioni cognitive di Duval. La nostra interpretazione getta le basi per un nuovo quadro teorico che proponiamo come strumento di analisi qualitativa dei processi di visualizzazione degli studenti mentre svolgono attività geometriche. In particolare, presentiamo analisi di estratti da un insieme di attività progettate e proposte in un intervento didattico finalizzato al rafforzamento delle capacità visivo-spaziali di un gruppo di studenti identificati come i più deboli da una selezionata classe 9a di un liceo italiano.*

*Gli autori utilizzano i concetti di Fischbein e Duval proponendo un'attività per gli studenti: Immagina un quadrilatero. Concentrati sul punto medio di ciascun lato. Traccia i segmenti che uniscono i punti medi di lati consecutivi. Cosa puoi dirti della figura che si forma?*



Quando lo studente usa le sue dita sulla scrivania per disegnare per un'immagine migliore della figura, l'interpretazione degli studenti è che sta usando la *capacità di manipolazione delle immagini*, aiutandosi con un'immagine esterna (il quadrilatero con i vertici ai suoi quattro polpastrelli) che su cui può agire. [...] Mentre muove le dita (formando quelli che sembrano vari rettangoli) usa la predizione geometrica, possibilmente aiutata dalla *scansione visiva*, per visualizzare il quadrilatero con i vertici nei punti medi dei lati del *quadrilatero manipolato*. [...] Non lo solleva mai dalla superficie, quindi sceglie una posizione coerente rispetto alla configurazione che vuole (mentalmente) osservare, e riprende a muovere le dita. Lo studente sembra essere in grado di manipolare la figura in un modo che va oltre il tipo di trasformazione descritto dall'apprensione operativa. [...] Lo studente sembra cercare un supporto esterno extra per la sua *manipolazione delle immagini e le capacità di previsione geometrica*. Inoltre, questo estratto è molto interessante per ciò che lo studente decide quindi di disegnare sul foglio di carta quando invitato a farlo. Sebbene abbia menzionato solo il caso in cui il quadrilatero è un quadrato e abbia realizzato con le sue dita vari casi in cui è un rettangolo, disegna un quadrilatero convesso molto più generale. Questo comportamento supporta la loro precedente ipotesi che lo studente sembra aver bisogno di un supporto esterno per la sua *manipolazione delle immagini e le capacità di previsione geometrica*.

Prendendo spunto da queste conclusioni qui proponiamo un'attività in classe utilizzando volumi fatti a mano da un semplice foglio bianco per promuovere e incoraggiare le abilità visivo-spaziali.

### 3) Progettazione

Rileviamo difficoltà nella seguente voce di B2:

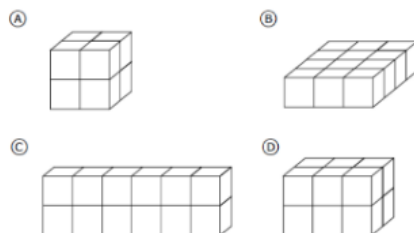
#### Q4G1.

Tutti i blocchetti hanno la stessa dimensione. Quale mucchio di blocchetti ha volume differente dagli altri?  $\square = 1\text{cm}^3$

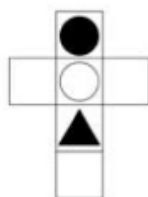


Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



**Q4G2.**



Quale di questi cubi può essere fatto dalla piegatura della figura sopra?



Queste difficoltà sono legate alla costruzione del significato del volume in immagini solide e visivo-spaziali.

**3.1. Difficoltà individuate tramite il questionario B2**

Lo strumento di intervento viene presentato in riferimento ad una specifica difficoltà rilevata tramite il questionario B2. Il volume è una misura di quanto una figura può contenere e ci dice qualcosa sulla capacità di una figura. La difficoltà di visualizzare gli stessi volumi di alcuni solidi costruiti in modo diverso ma con gli stessi solidi quantici, ovvero l'esercizio del questionario Q4G1 - B2 necessita di altri studi più approfonditi e il difficile riconoscere un solido costruito a partire dal questionario Q4G2 - B2 è un esercizio molto importanti disabilità nelle abilità visivo-spaziali.

**3.2. Area cognitiva e dominio matematico di interesse**

L'area di difficoltà individuata attraverso il questionario B2 è relativa al dominio della Geometria e l'area Visivo-Spaziale è l'area cognitiva coinvolta (Tabella 1).

Tabella 1: Le difficoltà rilevate sono legate al dominio cognitivo *Visivo-spaziale* e al dominio della *Geometria*

	Aritmetica	Geometria	Algebra
<b>Memoria</b>			
<b>Ragionamento</b>			
<b>Visivo-spaziale</b>		Q4G1: Tutti i blocchetti hanno la stessa dimensione. Quale mucchio di blocchetti ha volume differente dagli altri? Q4G2: Quale di questi cubi può essere fatto dalla piegatura della figura sopra?	

**3.3. Obiettivi educativi**

Questo strumento di intervento permette di indagare e migliorare l'*area cognitiva Visivo-Spaziale* in *Geometria* partendo da alcune figure molto semplici che permettono di comprendere, in alcuni brevi



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

passaggi, la geometria visivo-spaziale e come queste diverse figure possano aiutare con altre più complicate.

### 3.4. Rivolgersi allo Studente o alla classe

Lo strumento di intervento può essere rivolto a tutta la classe, cercando una discussione in classe positiva da parte degli studenti. È possibile immaginare che dalla discussione potrebbero sorgere molti casi diversi e che negli studenti potrebbe nascere un nuovo interesse. Gli studenti incontrano Geometria tutto il giorno, in classe, a casa, ovunque, ... Essi possono riconoscere tutti i tipi di solidi semplicemente camminando e discutendone in classe o a casa, sviluppando loro stessi nuovi "strumenti".

### 3.5. Attività educative: lo strumento di intervento

In questo paragrafo vengono descritte in dettaglio le attività dello strumento.

L'insegnante inizia dal cruscotto per disegnare un solido, un prisma rettangolare e chiede agli studenti di disegnare da soli ogni superficie del solido, cercando di rispettare le proporzioni.

Dopo una discussione in classe, l'insegnante disegna la superficie aperta di un diverso prisma, un prisma triangolare, quindi gli studenti devono disegnare il solido corrispondente utilizzando il foglio e la matita.

Una nuova discussione in classe dovrebbe aiutare tutti gli studenti, in particolare quelli che hanno avuto difficoltà con il questionario B2. L'insegnante guiderà, chiedendo cosa fanno (per un campione della classe) e mostrando quei risultati, giusti o sbagliati, focalizzando la discussione per motivare a fare meglio e per capire la soluzione in tutti gli studenti.

Quindi due diversi studenti creeranno due nuovi esercizi, uno partirà da un solido, l'altro partirà da una superficie aperta. La seconda figura, dopo essere stata disegnata sul foglio, deve essere creata come un volume dagli studenti con taglierini e nastro adesivo. L'insegnante aprirà una discussione in classe su ciò che hanno creato e su quanto sia difficile.

Dopo questi esercizi gli insegnanti chiederanno nuovi esercizi agli studenti che hanno avuto problemi e potranno partire da una superficie solida o aperta, a loro piacimento.

### 4) Discussione attraverso le linee guida UDL sulle attività sopra menzionate

Osserviamo che lo stesso scopo educativo di costruire il significato di "volume" in Geometria viene affrontato in modi diversi agendo sui tre principi dell'UDL (Tabella 7, in rosso i nostri commenti per illustrare la connessione tra i principi e le nostre attività).

**Tabella 7: Analisi delle attività attraverso la Tabella dei principi UDL.**

Impegno	Rappresentazione	Azione ed espressione
Interesse di reclutamento	<b>Percezione</b> Offrire modi per personalizzare la visualizzazione delle informazioni Offri alternative per le informazioni uditive Offri alternative per le informazioni visive  Vengono mostrati e costruiti molti tipi dello stesso tipo di volume (visivo-dinamico; visivo)	<b>Azioni Fisiche</b> Varia i metodi di risposta e navigazione Uso di volumi fatti a mano.
Sforzo di sostegno e Persistenza	<b>Lingua e simboli</b>	<b>Comunicazione di espressione</b>
Autoregolamentazione	<b>Comprensione</b> Attivare o fornire conoscenze di base	<b>Funzioni esecutive</b>





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

	<p>Usare un volume semplice ben noto agli studenti all'inizio</p> <p>Evidenzia modelli, caratteristiche critiche, grandi idee e relazioni</p> <p>L'uso del cruscotto per la prima volta per creare le condizioni per cercare di immaginare le figure.</p> <p>Quindi usa i volumi fatti a mano.</p> <p>Infine utilizzando la dashboard per verificare le abilità visuo-spaziali.</p> <p>Guida l'elaborazione e la visualizzazione delle informazioni</p> <p>Massimizza il trasferimento e la generalizzazione</p> <p>I volumi realizzati sono facilmente generalizzabili ad altre figure più complicate o in situazioni diverse.</p>	
--	---	--

### Bibliografia

[1] Jones, K. (1998), Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning, Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18(1&2), 29-34.

[2] Elisa Miragliotta, Anna Baccaglioni-Frank. Visuo-spatial abilities and geometry: A first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01950545

[3] Baccaglioni-Frank, Anna, "Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging" (2010). *Doctoral Dissertations*. 529.

[4] Duval R. (1995) Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In: Sutherland R., Mason J. (eds) Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education. NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences), vol 138. Springer, Berlin, Heidelberg

[5] Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.