



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

STRUMENTO DI INTERVENTO

Dimostrazione di teoremi - livello avanzato

1. Introduzione

Lo strumento di intervento è concepito per affrontare difficoltà specifiche legate al dominio matematico della geometria e al dominio cognitivo del ragionamento. Attraverso lo strumento di intervento, concepito per tutta la classe, gli studenti possono riflettere sul processo di dimostrazione, con specifico riferimento a passaggi cruciali come la comprensione del testo, l'identificazione di ipotesi e tesi, la rappresentazione di ipotesi sulla figura, l'organizzazione della prova come una sequenza di affermazioni logicamente connesse.

Si suggerisce di considerare lo strumento di intervento "Proving - livello intermedio" prima di iniziare questo. Lo strumento ha lo stesso scopo educativo, con difficoltà crescenti riguardo all'affermazione da dimostrare.

Lo strumento consiste in una serie di domande che l'insegnante può porre agli studenti durante una discussione in classe. Le domande possono essere proiettate sulla lavagna. Se gli studenti hanno a disposizione tablet o computer con connessione ad internet, le domande possono essere somministrate tramite un sistema di risposta interattivo (es. Socrative, Mentimeter).

2. Modello teorico di riferimento

Ricordiamo qui la cornice di Karagiannakis e colleghi (Tabella 1), che aiuta a caratterizzare le difficoltà degli studenti in matematica.

Tabella 1: struttura di Karagiannakis e colleghi: domini del modello a quattro punte e set di abilità matematiche associate a ciascun dominio.

Domain	Mathematical skills associated with the domain
Core number	Estimating accurately a small number of objects (up to 4); estimating approximately quantities; placing numbers on number lines; managing Arabic symbols; transcoding a number from one representation to another (analogical-Arabic-verbal); counting principles awareness
Memory (retrieval and processing)	Retrieving numerical facts; decoding terminology (numerator, denominator, isosceles, equilateral); remembering theorems and formulas; performing mental calculations fluently; remembering procedures and keeping track of steps
Reasoning	Grasping mathematical concepts, ideas and relations; understanding multiple steps in complex procedures/algorithms; grasping basic logical principles (conditionality – "if ... then ..." statements – commutativity, inversion); grasping the semantic structure of problems; (strategic) decision-making; generalizing
Visual-spatial	Interpreting and using spatial organization of representations of mathematical objects (for example, numbers in decimal positional notation, exponents, geometrical 2D and 3D figures or rotations); placing numbers on a number line; confusing Arabic numerals and mathematics symbols; performing written calculation when position is important (e.g. borrowing/carrying); interpreting graphs and tables

Ricordiamo inoltre che, durante la costruzione di B2, abbiamo scelto domande relative alle aree cognitive nonché a tre domini matematici: aritmetica, geometria, algebra (il numero Core non è correlato a tutte le



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

aree cognitive). Di conseguenza, abbiamo proposto domande che si trovavano in alcune celle della seguente tabella (Tabella 2):

Tabella 2: Doppia relazione tra aree cognitive (memoria, ragionamento e visuo-spaziale) e domini matematici (aritmetica, geometria, algebra).

	Aritmetica	Geometria	Algebra
Memoria			
Ragionamento			
Visuospatialità			

Qui presentiamo ulteriori riferimenti teorici che ci hanno aiutato a progettare gli strumenti di intervento.

Prima di tutto, ci riferiamo ai principi del design universale per l'apprendimento (UDL) (Tabella 3), un framework concepito specificamente per progettare attività educative inclusive (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabella 3: linee guida UDL

	Fornire molteplici mezzi di COINVOLGIMENTO	Fornire molteplici mezzi di RAPPRESENTAZIONE	Fornire molteplici mezzi di AZIONE ed ESPRESSIONE
	Reti Efficaci – I “PERCHÉ” dell’apprendimento	Reti di Riconoscimento – Il “COSA” dell’apprendimento	Reti Strategiche – Il “COME” dell’apprendimento
Accedere	Fornire opzioni per Catturare l’interesse : <ul style="list-style-type: none"> Ottimizzare la scelta individuale e l’autonomia Ottimizzare rilevanza, valore e autenticità Minimizzare minacce e distrazioni 	Fornire opzioni per la Percezione : <ul style="list-style-type: none"> Offrire modi di personalizzare la visualizzazione delle informazioni Offrire alternative di sollecitazioni uditive Offrire alternative per le informazioni visive 	Fornire opzioni per Azioni Fisiche : <ul style="list-style-type: none"> Variare i metodi di risposta e di movimento Ottimizzare l’accesso a strumenti e tecnologie assistive
Costruire	Fornire opzioni per Sostenere Sforzo & Persistenza <ul style="list-style-type: none"> Rafforzare l’importanza degli scopi e degli obiettivi Variare richieste e risorse per ottimizzare la sfida Promuovere collaborazione e condivisione Accrescere i <i>feedback</i> orientati alla padronanza dell’apprendimento 	Fornire opzioni per Linguaggio & Simboli <ul style="list-style-type: none"> Precisare il lessico e i simboli Precisare la sintassi e la struttura Supportare la decodifica di testo, notazioni e simboli matematici Promuovere la comprensione in tutti i linguaggi Illustrare attraverso molteplici mezzi 	Fornire opzioni per Espressione e Comunicazione : <ul style="list-style-type: none"> Usare molteplici mezzi di comunicazione Usare molteplici mezzi di costruzione e composizione Costruire fluidità nella comunicazione mediante livelli di supporto graduati per la pratica e la prestazione
Interiorizzare	Fornire opzioni per l’ auto-regolamentazione : <ul style="list-style-type: none"> Promuovere prospettive e convinzioni che ottimizzano la motivazione Facilitare capacità personali e strategie Sviluppare autovalutazione e riflessione 	Fornire opzioni per la Comprensione : <ul style="list-style-type: none"> Attivare o fornire la conoscenza del contesto Evidenziare percorsi, caratteristiche fondamentali, le grandi idee e le relazioni Guidare la visualizzazione e i processi delle conoscenze Massimizzare trasferimento e generalizzazione delle conoscenze 	Fornire opzioni per la Funzioni Esecutive Guidare verso la definizione di obiettivi appropriati: <ul style="list-style-type: none"> Supportare lo sviluppo di pianificazioni e strategie Facilitare la gestione delle informazioni e delle risorse Potenziare la capacità di monitorare i progressi
	Studenti esperti che sono...		
	Determinati & Motivati	Intraprendenti e Competenti	Strategici e Orientati agli obiettivi

Il Centro per le Speciali Tecnologie Applicate (CAST) ha sviluppato un quadro completo attorno al concetto di Universal Design for Learning (UDL), con l’obiettivo di concentrare la ricerca, lo sviluppo e la pratica educativa sulla comprensione della diversità e sulla facilitazione dell’apprendimento



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

(Edyburn, 2005). L'UDL include una serie di Principi, articolati in *Linee guida e punti di controllo*¹. La ricerca alla base della struttura di UDL è che "gli studenti sono molto variabili nella loro risposta all'istruzione. [...]"

Pertanto, l'UDL si concentra su queste differenze individuali come elemento importante per comprendere e progettare istruzioni efficaci per l'apprendimento.

A questo scopo, l'UDL propone tre Principi fondamentali: 1) fornire molteplici mezzi di rappresentazione, 2) fornire molteplici mezzi di azione ed espressione, 3) fornire molteplici mezzi di coinvolgimento. In particolare, le linee guida all'interno del primo principio si riferiscono ai mezzi di percezione coinvolti nel ricevere determinate informazioni e di "comprensione" delle informazioni ricevute. Le linee guida all'interno del secondo principio tengono conto dell'elaborazione di informazioni/idee e della loro espressione. Infine, le linee guida all'interno del terzo principio trattano il dominio dell'"affetto" e della "motivazione", anch'essi essenziali in ogni attività educativa.

Inoltre ci riferiamo all'esperienza del Progetto Europeo **FaSMed** che si focalizza sulla valutazione formativa in matematica e scienze, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

La valutazione formativa (VF) è concepita come un metodo di insegnamento in cui "l'evidenza circa i risultati dello studente è ottenuta, interpretata e usata da insegnanti, studenti e dai loro pari per prendere decisioni sui passi successivi da compiere nell'istruzione che possono essere migliori o meglio fondati rispetto alle decisioni che sarebbero state prese in assenza dell'evidenza che è stata ottenuta" (Black & Wiliam, 2009, p. 7).

Il progetto FaSMed fa riferimento agli studi di William e Thompson del 2007, che indentificano cinque strategie chiave per la pratica della VF in ambito scolastico: (a) *Chiarire e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo*; (b) *progettare discussioni efficaci in classe e altre attività di apprendimento che producano evidenza della comprensione degli studenti*; (c) *fornire feedback che facciano progredire gli studenti*; (d) *far sì che gli studenti siano risorse di apprendimento uno per l'altro*; (e) *far sì che gli studenti siano padroni del loro apprendimento*. L'insegnante, i compagni e lo studente stesso sono gli artefici della messa in atto di queste strategie di VF.

Tabella 4: Strategia per la valutazione formativa

	Dove sta andando lo studente	Dov'è lo studente adesso	Come arrivare
Insegnante	1 Chiarire gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo Comprendere e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo	2 Progettare discussioni efficaci in classe e altre attività di apprendimento che producano evidenza della comprensione degli studenti	3 Fornire <i>feedback</i> che facciano progredire gli studenti
Pari	Comprendere e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo	4 Far sì che gli studenti siano risorse di apprendimento uno per l'altro	
Studente	Comprendere e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo	5 Far sì che gli studenti siano padroni del loro apprendimento	

Le attività FaSMed sono organizzate in sequenza, comprendono lavori di gruppo su fogli di lavoro, discussioni di classe dove i lavori di gruppo selezionati sono discussi dalla classe intera, sotto la direzione del docente. Tenendo conto delle strategie della valutazione formativa e delle funzionalità tecnologiche, Cusi, Morselli & Sabena (2017, p. 758) hanno ideato tre tipi di fogli di lavoro per le attività in classe:

- (1) *Fogli di lavoro per Problema*: fogli di lavoro che introducono un problema e propongono una o più domande che coinvolgono l'interpretazione o la costruzione della

¹ Per una lista complete di questi principi, line guida a punti di controllo a una descrizione più vasta delle attività di CAST, visitare il sito <http://www.udlcenter.org/>





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

- rappresentazione (verbale, simbolica, grafica e tabulare) della relazione matematica tra due variabili (e.g. interpretare un grafico tempo - distanza);
- (2) *Fogli di lavoro di Aiuto*: concepiti per supportare gli studenti che incontrano difficoltà con il *foglio di lavoro per problema* proponendo specifici suggerimenti (e.g. domande guidate);
 - (3) *Foglio di lavoro per Sondaggio*: fogli di lavoro che suggeriscono un sondaggio tra diverse opzioni.

Gli autori hanno identificato delle strategie di *feedback* che l'insegnante può adottare per fornire un riscontro agli studenti (Cusi, Morselli & Sabena, 2018, p. 3466). Queste strategie sono impiegate nella discussione in classe organizzata dal docente dopo il lavoro di gruppo:

Tabella 5:

Ridare voce	Quando l'insegnante fa da specchio ad un intervento di un alunno in modo da richiamare l'attenzione su di esso. Spesso, durante l'attività di <i>ridare voce</i> , l'insegnante sottolinea con l'intonazione della voce alcune parole della frase che sta ripetendo.
Riformulare	La riformulazione si ha quando il docente riformula l'intervento di uno studente, con il doppio scopo di richiamare l'attenzione della classe e rendere l'intervento più intellegibile a tutti. La riformulazione avviene quando l'insegnante avverte che l'intervento può essere utile ma necessita di essere comunicato in un modo migliore per diventare una risorsa per gli altri. [...]. Le strategie del ridare voce e riformulare trasformano uno studente (l'autore dell'intervento) in una risorsa per la classe.
Riformulare con una struttura	Quando il docente, oltre a riformulare, aggiunge alcuni elementi per guidare il lavoro degli studenti.
Rilanciare	Quando il docente reagisce all'intervento dello studente, che considera interessante per la classe, non dando un <i>feedback</i> diretto, ma ponendo una domanda connessa. In questo modo, attraverso " <i>il rilancio</i> " l'insegnante fornisce un <i>feedback</i> implicito [...] all'intervento dello studente, suggerendo che l'argomento è interessante e prezioso da approfondire o, al contrario, che ha qualche punto problematico e dovrebbe essere rivisto.
Contrastare	Il contrastare prende piede quando il docente richiama l'attenzione su due o più interventi, che rappresentano due differenti posizioni, così da promuovere un confronto. Dal contrasto, [...] gli autori delle due posizioni possono essere una risorsa per la classe così come essere responsabili del proprio apprendimento.

Inoltre, si fa riferimento alla letteratura di ricerca relativa all'approccio alla dimostrazione nella scuola secondaria. Balacheff (1982) sottolinea che l'insegnamento delle dimostrazioni e dei teoremi dovrebbe avere il duplice scopo di far capire agli studenti cos'è una dimostrazione e imparare a produrla. È importante che gli studenti comprendano la necessità della dimostrazione, altrimenti il rischio è che si sentano la prova come un discorso volto a mostrare all'insegnante che lo studente possiede una data conoscenza (la prova rischia di essere vista come parte del contratto didattico, piuttosto che come mezzo per convalidare l'affermazione).

Balacheff distingue tra prove pragmatiche e prove intellettuali. I primi si basano sull'azione reale che viene compiuta sulle rappresentazioni degli oggetti matematici, mentre i secondi si basano sulle esperienze mentali e sono svolti tramite il linguaggio.

In particolare, Balacheff illustra:

- Empirismo naïf (per convalidare l'affermazione controllando alcuni esempi)
- Esperienza cruciale (per convalidare l'affermazione controllando un esempio "cruciale" e difficile)
- Esempio generico (per convalidare un'affermazione facendo riferimento a un esempio, considerato rappresentativo di un'intera categoria)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

- Esperimento mentale (per convalidare un'affermazione che non si riferisce a un dato esempio, muovendosi così verso prove intellettuali).

Lo strumento di intervento ha lo scopo di guidare gli studenti verso la costruzione della prova. Inoltre, gli strumenti di intervento mirano a suscitare la discussione sulla necessità di passare da prove pragmatiche a prove intellettuali.

3. Progettazione

3.1 Difficoltà identificate attraverso il questionario B2

Lo strumento di intervento mira ad affrontare le difficoltà specifiche che sono state delineate tramite i Questionari B1 e B2 (questionario B1: domande 7-8-9-10-11; Questionario B2: Q2G1, Q2G2, Q2G3), ovvero difficoltà nel trattare una geometria figura e le sue proprietà.

Inoltre, lo strumento di intervento ha lo scopo di preparare lo studente all'approccio alla prova.

Questo è lo strumento di intervento di "livello avanzato": si consiglia di affrontare questo strumento di intervento dopo aver considerato anche gli strumenti riferiti al dominio geometrico e cognitivo visuo-spaziale e lo strumento di intervento di "livello intermedio".

3.2 Area cognitiva e dominio matematico interessati

Lo strumento di intervento fa riferimento al dominio matematico della geometria e al dominio cognitivo del ragionamento, sebbene vi siano connessioni rilevanti con i domini cognitivi della memoria (recupero di fatti e teoremi geometrici) e visuo-spaziale (trattare una figura geometrica, gestire le informazioni in diverse rappresentazioni compreso quello visuo-spaziale).

3.3 Obbiettivi didattici

Tramite lo strumento di intervento gli studenti sono guidati a costruire una dimostrazione, riflettendo su passaggi importanti: comprendere il testo, identificare ipotesi e tesi, rappresentare ipotesi sulla figura e con altri sistemi di rappresentazione (come formule algebriche), richiamare già note fatti geometrici, organizzando la prova sotto forma di una catena deduttiva di argomenti.

Lo strumento consiste in una serie di domande che l'insegnante può porre agli studenti durante una discussione in classe. Le domande possono essere proiettate sulla lavagna. Se gli studenti hanno a disposizione tablet o computer con connessione ad internet, le domande possono essere somministrate tramite un sistema di risposta interattivo (es. Socrative, Mentimeter).

In questo strumento di intervento mettiamo in atto specifiche linee guida di UDL.

Le linee guida all'interno del Principio 1 (forniscono molteplici mezzi di rappresentazione), suggeriscono di proporre diverse opzioni di percezione e di offrire supporto per la decodifica di notazioni e simboli matematici.

Lo strumento di intervento offre guida e supporto per la decodifica di un testo matematico.

Le linee guida del Principio 2 (forniscono molteplici mezzi di azione ed espressione) suggeriscono di offrire diverse opzioni di espressione e comunicazione a supporto della pianificazione e dello sviluppo della strategia.

Lo strumento di intervento guida la pianificazione e lo sviluppo della strategia.

Le linee guida del Principio 3 mostrano come determinate attività possono reclutare l'interesse degli studenti, ottimizzando la scelta e l'autonomia individuali e riducendo al minimo le minacce e le distrazioni. Agli studenti vengono poste domande sotto forma di sondaggi (qual è la risposta corretta?) In modo da promuovere la loro partecipazione all'attività.

In termini di valutazione formativa, gli studenti si prendono cura delle domande poste sotto forma di sondaggi o domande aperte (strategia 5: diventano proprietari del proprio apprendimento); agli studenti viene chiesto di commentare le risposte errate di uno studente fittizio (strategia 4: diventano risorsa per gli altri); dopo il sondaggio, l'insegnante può promuovere una discussione equilibrata (strategia 2); discutendo i risultati del sondaggio l'insegnante lavora individualmente o in piccoli



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

gruppi e, dopo ogni item o alla fine dell'attività, l'insegnante può promuovere una discussione in classe (strategia di valutazione formativa 2). Gli studenti discutono le loro strategie e difficoltà (strategie 4 e 5). L'insegnante può monitorare i progressi degli studenti durante il gioco, fornendo feedback e suggerimenti (strategia 3).

3.4 Beneficiari dell'intervento didattico (studente singolo/intera classe)

Lo strumento di intervento è rivolto a tutta la classe.

3.5 Attività didattica: lo strumento di intervento

Lo strumento consiste in una serie di domande (sotto forma di sondaggi o domande aperte) che l'insegnante può porre agli studenti durante una discussione in classe. Le domande sono già inserite in una presentazione power point, in modo che l'insegnante possa proiettarle sulla lavagna.

Se gli studenti hanno a disposizione tablet o computer con connessione ad internet, le domande possono essere somministrate tramite un sistema di risposta interattivo (es. Socrative, Mentimeter).

Il file power point viene fornito in un allegato separato. Qui inseriamo alcuni commenti sulla sequenza delle domande.

Agli studenti viene fornito il testo di una dichiarazione da dimostrare. Il testo è accompagnato da una figura.

Prima di tutto, gli studenti sono tenuti a trovare la tesi nel testo. L'insegnante può promuovere una discussione sulle risposte degli studenti (strategia di valutazione formativa 2).

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
- Trova la tesi e mettila in evidenza

Lo stesso procedimento può essere seguito per le ipotesi nel testo

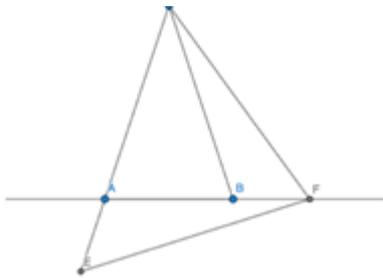
- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
- Trova ed elenca le ipotesi

Attraverso la diapositiva successiva, il docente può promuovere una discussione volta a capire come "rabslate" il testo all'interno della figura. Gli studenti sono inoltre portati a riflettere sul fatto che non tutte le ipotesi possono essere rappresentate sulla figura in modo efficiente.

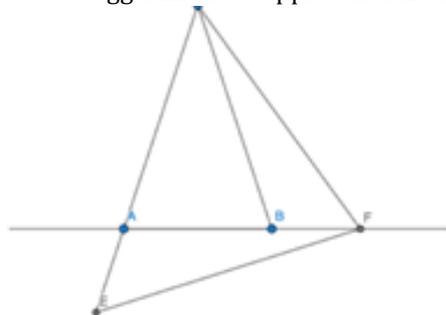
- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
Se devi disegnare la figura, quali sono le prime ipotesi che prendi in considerazione?
- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
Se devi disegnare la figura, qual è l'ipotesi più difficile da rappresentare sul disegno?



- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
Come puoi rappresentare tutte le ipotesi?
- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
Suggerimento: rappresenta alcune ipotesi sotto forma di uguaglianza, non sul disegno



- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
Suggerimento: rappresenta alcune ipotesi sotto forma di uguaglianza, non sul disegno

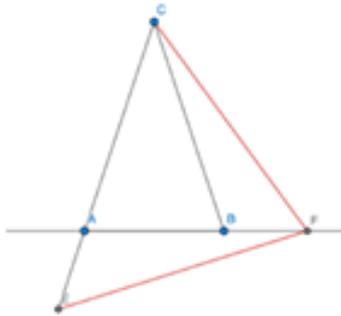


$$AE = AC - AB$$

Nella successiva serie di diapositive, gli studenti sono invitati a riflettere sulla tesi e portati a capire che per arrivare alla tesi è necessario richiamare il criterio SAS e applicarlo alla figura. Ciò significa organizzare passaggi intermedi orientati all'obiettivo, lavorando sulla figura e sulle uguaglianze.

L'insegnante può anche promuovere alcuni sondaggi per chiedere agli studenti di commentare e valutare le risposte fornite da compagni di classe fittizi. In questo modo agiscono come risorse per un compagno di classe fittizio (strategia 4) e riflettono sull'importanza di organizzare la prova come un discorso in cui le affermazioni devono provenire dall'ipotesi o dalla conoscenza precedente (prova intellettuale).

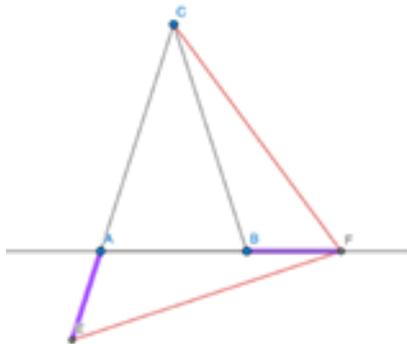
- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
Cosa è rappresentato dal colore rosso?
 $AE = AC - AB$



- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF

Cosa viene rappresentato dal colore viola?

$$AE = AC - AB$$

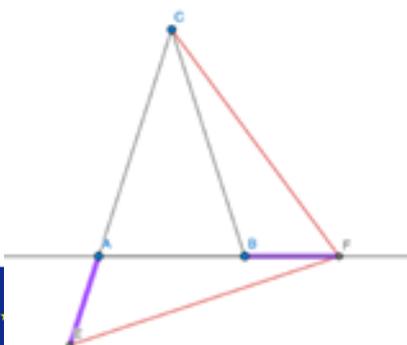


- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF

L'obiettivo è dimostrare che i due segmenti rossi sono congruenti.

Puoi prendere in considerazione alcuni triangoli che contengono i segmenti rossi e mostrare che tali triangoli sono congruenti.

$$AE = AC - AB$$

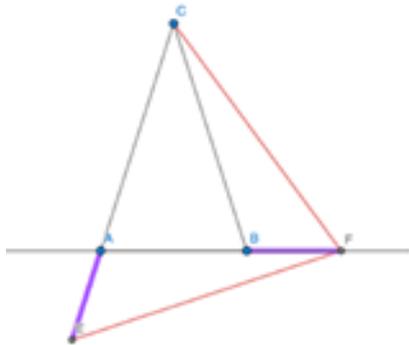




Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Quali triangoli prenderesti in considerazione?

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
Alice: triangoli AEF e BFC
Barbara: triangoli AFE e AEF
 $AE = AC - AB$



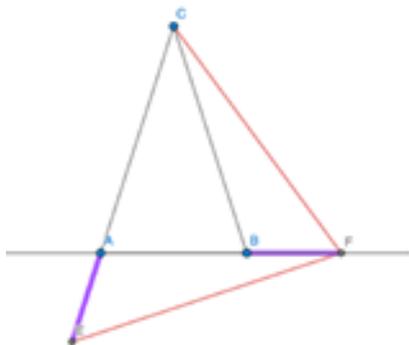
Quali triangoli prenderesti in considerazione?

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF
 $AE = AC - AB$

L'obiettivo è utilizzare il primo criterio dei triangoli (criterio SAS).

So già che $AE = BF$.

Devo dimostrare che i segmenti AF e BC sono congruenti e che gli angoli FAE e CBF sono congruenti.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

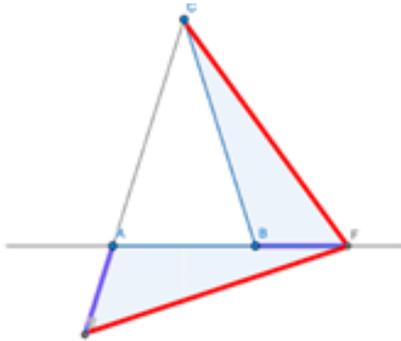


Project Number: 2018-1IT02KA201048274

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF. Considera le cifre e le uguaglianze. E il segmento AF?

Richiama questo:
 $AE = AC - AB$

$$AE = BF$$



- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF

Poiché $AE = AC - AB$
Ottieni
 $AB = AC - AE$

Sostituisci l'espressione di AB in AF

$$AF = AB + BF = AC - AE + BF = AC$$

Richiama questo:
 $AE = AC - AB$

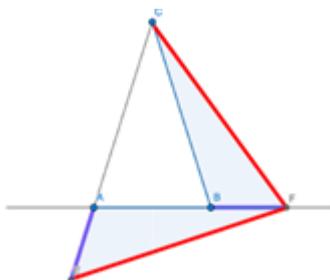
$$AE = BF$$

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF

Poiché $AE = AC - AB$
Ottieni
 $AB = AC - AE$

Sostituisci l'espressione di AB in AF

$$AF = AB + BF = AC - AE + BF = AC. \quad \leftarrow \text{Cos'è successo qua? Guarda i segmenti sottolineati}$$



by the
amme
Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



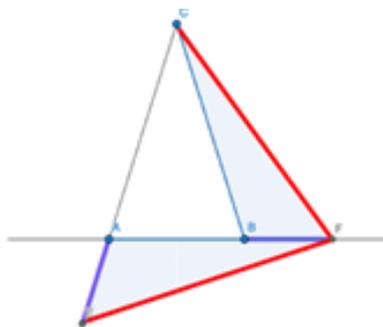
Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Richiama questo:

$$AE = AC - AB$$

$$AE = BF$$

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE . Mostra che CF è congruente con EF . Hai scoperto che $AF = AC$. Per ottenere che $AF = BC$, quali informazioni puoi utilizzare?



Richiama questo:

$$AE = AC - AB$$

$$AE = BF$$

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE . Mostra che CF è congruente con EF .

Hai scoperto che $AF = AC$

Per ottenere che $AF = BC$, quali informazioni puoi utilizzare?

Poiché il triangolo ABC è isoscele, hai $AC = BC$

Poi

$$AF = AC = BC$$

$$AF = BC$$

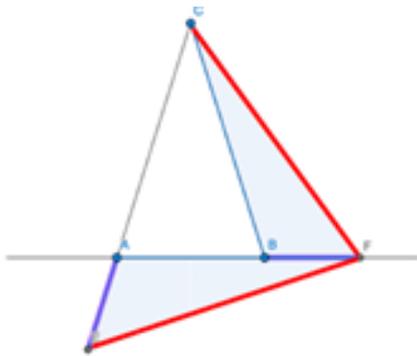
Richiama questo:

$$AE = AC - AB$$

$$AE = BF$$



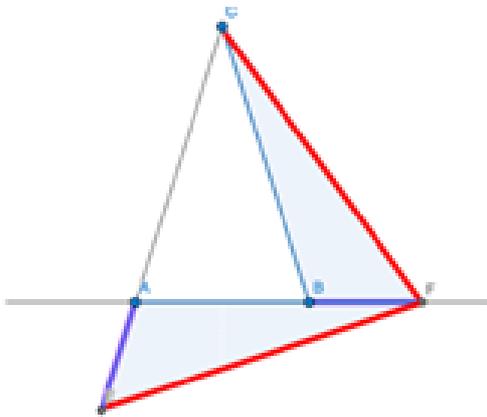
- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF



Hai mostrato che i segmenti $AF = BC$.
Inoltre, $AE = BF$.

Per applicare il criterio SAS, è necessario anche ...

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF



Perché gli angoli rossi (FAE e CBF) sono congruenti?

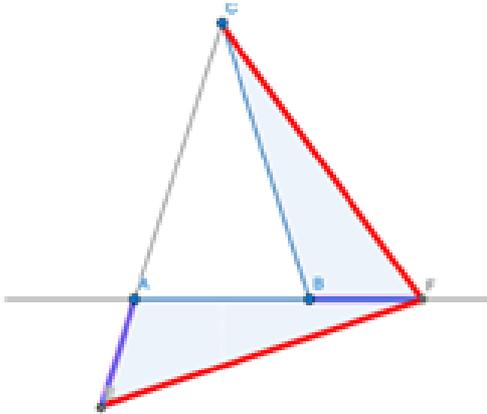
Alice: per ipotesi

Claire: perché sono complementari alla stessa angolazione

Barbara: per costruzione

Darla: perché sono supplementari agli angoli congruenti

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF

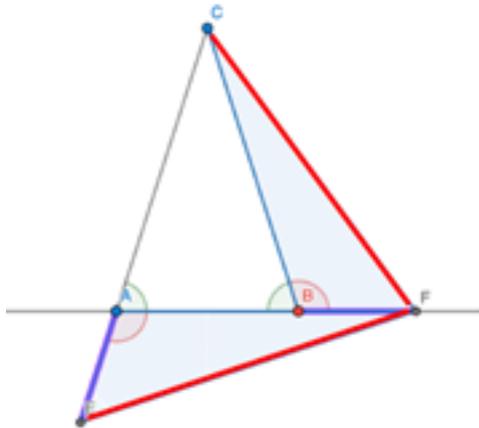


Darla: perché sono supplementari agli angoli congruenti

Quali sono gli angoli congruenti?

Perché sono congruenti?

- Disegna un triangolo isoscele ABC in modo che la base AB sia più piccola del lato obliquo. Estendi CA di un segmento AE congruente alla differenza tra il lato obliquo e la base. Estendi la base AB di un segmento BF congruente ad AE. Mostra che CF è congruente con EF



Riassumendo:

$AF = BC$ a causa delle uguaglianze che sono nelle ipotesi e del fatto che il triangolo ABC è isoscele.

$AE = BF$ per costruzione

Gli angoli FAE e CBF sono congruenti perché sono supplementari agli angoli congruenti.

Quindi, per il criterio SAS i triangoli azzurri sono congruenti

Quindi il segmento CF e EF sono congruenti



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

5. Bibliografia e sitografia

- [1]Balacheff N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège, Recherches en Didactiques des Mathématiques, vol.3, pp. 261-304.
- [2]Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115–141. <https://doi.org/10.1080/19404158.2017.1289963>
- [3]Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31.
- [4]Cusi, A., Morselli, F.,& Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. ZDM Mathematics Education.
- [5]Cusi, A., Morselli, F.,& Sabena, C. (2018). Enhancing formative assessment in mathematical class discussion: a matter of feedback. Proceedings of CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01949286, pp. 3460-3467.
- [6]Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115–141.
- [7]Robotti E., Baccaglini-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In Innovation & Technology. Series Mathematics Education in the Digital Era, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.