

## Materiały do pracy z uczniami

# Wspieranie pamięci w zapamiętywaniu twierdzeń

### 1. Wstęp

W celu opracowania zestawu działań edukacyjnych mających na celu rozwiązanie problemów, które dotyczą wspierania pamięci w geometrii, odwołujemy się do kilku istotnych teorii, które zostaną opisane w sesji 2. W sekcji 3 opisano projekt zajęć edukacyjnych. Opisano w szczególności, czy zajęcia są skierowane do jednego ucznia, czy do całej klasy, jaki jest cel edukacyjny zajęć, obszar poznawczy i dziedzina matematyki oraz jakich obszarów trudności zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2 zadania dotyczą.

### 2. Wprowadzenie teoretyczne

Teoretyczne odniesienia, które pomogły nam skonstruować materiały do pracy z uczniami, to:

1) Zasady UDL (**Universal Design for Learning**), będące wytycznymi stworzonymi specjalnie do projektowania włączających działań edukacyjnych (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Zasady UDL

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESJI
	“dlaczego” się uczyć	“czego” się uczyć	“jak” się uczyć
D o s t ę p	<b>Wzbudzanie zainteresowania:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię</li> <li>• Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność</li> <li>• Ograniczaj zagrożenia i elementy rozprasające</li> </ul>	<b>Postrzeżenie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji</li> <li>• Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio</li> <li>• Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych</li> </ul>	<b>Działania fizyczne:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu</li> <li>• Zapewnij optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających</li> </ul>
T w o r z e	<b>Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zwiększ znaczenie celów i zadań</li> <li>• Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie</li> <li>• Wspieraj współpracę i poczucie przynależności</li> <li>• Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału</li> </ul>	<b>Język i symbole:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wyjaśnij słownictwo i symbole</li> <li>• Wyjaśnij składnię i budowę zdań</li> <li>• Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli</li> <li>• Propaguj zrozumienie w różnych językach</li> <li>• Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu</li> </ul>	<b>Ekspresja i komunikacja:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Używaj różnorodnych metod komunikacji</li> <li>• Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia</li> <li>• Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności</li> </ul>
S t o s o w a n i	<b>Samoregulacja:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację</li> <li>• Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami</li> <li>• Rozwijaj samoocenę i refleksję</li> </ul>	<b>Rozumienie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uaktywniaj lub zapewnij posiadaną wiedzę podstawową</li> <li>• Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeżenie związków</li> <li>• Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją</li> <li>• Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację</li> </ul>	<b>Funkcja wykonawcza:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów</li> <li>• Wspieraj planowanie i rozwój strategii</li> <li>• Ułatwaj zarządzanie informacjami i zasobami</li> <li>• Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów</li> </ul>
	<b>Wykreowanie uczniów, którzy ....</b>		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są zaradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel

Centrum Specjalnej Technologii Stosowanej (CAST) opracowało kompleksowe ramy dotyczące koncepcji UDL, mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się (Edyburn, 2005). UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w wytycznych i punktach kontrolnych. Badania, na których opiera się struktura UDL, wskazują, że „uczniowie bardzo różnie reagują na instrukcje. [...]” Dlatego UDL koncentruje się na tych indywidualnych różnicach jako na ważnym elemencie zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) zapewnienie różnorodnych środków prezentacji, 2) zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji, 3) zapewnienie różnorodnych środków angażujących. W szczególności wytyczne w ramach pierwszej zasady dotyczą środków percepcji związanych z otrzymywaniem pewnych informacji oraz „zrozumienia” otrzymanych informacji. Zamiast tego, wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji i pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą domeny „afektu” i „motywacji”, które są również istotne w każdej działalności edukacyjnej. W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach tych trzech zasad<sup>1</sup>.

Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewnienie różnorodnych sposobów prezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Co więcej, wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie zrozumienia wzorców, cech wyróżniających, oryginalnych pomysłów i związków między pojęciami matematycznymi. Wreszcie, nasze analizy dadzą przykłady, w jaki sposób oprogramowanie AINuSet może kierować przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia. Co więcej, wytyczne zawarte w Zasadzie 2 (zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenia i elementy rozpraszające.

W części 4 przeanalizujemy przykłady działań, klasyfikując je zarówno według typu uczenia matematycznego, jak i obszaru poznawczego, które wspierają. Pokażemy, jak te przykłady zostały zaprojektowane zgodnie z zasadami UDL, aby były działaniami włączającymi i skutecznymi w przewyżnianiu trudności matematycznych zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach trzech Zasad. W celu scharakteryzowania trudności uczniów w geometrii odwołujemy się do następujących elementów twierdzeń Karagiannakisa i współpracowników (tab. 1), które dotyczyły pamięci w wyszukiwaniu faktów geometrycznych i przetwarzaniu geometrycznym: wyszukiwanie faktów geometrycznych, zapamiętywanie twierdzeń, zapamiętywanie hipotez i tez, na których się koncentrujemy.

Tabela 1: Model Karagiannakisa i współpracowników: dziedziny czterotorowego modelu i zestawy umiejętności matematycznych związanych z każdą z nich

<b>dziedzina matematyki</b>	<b>Umiejętności matematyczne związane z daną dziedziną</b>
<b>liczby</b>	Dokładne oszacowanie małej liczby obiektów (do 4); szacowanie przybliżonych ilości; umieszczanie liczb na osiach liczbowych; operowanie symbolami arabskimi; transkodowanie liczby z jednej reprezentacji na drugą (rzymskie-arabskie-werbalne); świadomość zasad liczenia
<b>pamięć</b>	Przypominanie sobie faktów; dekodowanie terminologii (licznik, mianownik, równoramienne, równoboczne); zapamiętywanie twierdzeń i wzorów; płynne wykonywanie obliczeń w myślach; zapamiętywanie procedur i śledzenie kroków
<b>rozumowanie</b>	Uchwycenie pojęć, idei i relacji matematycznych; zrozumienie wielu etapów złożonych procedur / algorytmów; uchwycenie podstawowych zasad logicznych (warunkowość – „jeśli ... wtedy ....” stwierdzenia - przemienność, inwersja); uchwycenie semantycznej struktury problemów; (strategiczne) podejmowanie decyzji; uogólnienie
<b>wizualizacja przestrzenna</b>	Interpretacja i wykorzystanie przestrzennej organizacji reprezentacji obiektów matematycznych (na przykład liczby w notacji dziesiętnej, wykładniki, figury geometryczne 2D i 3D lub obroty); umieszczanie liczb na osi liczbowej; mylenie cyfr arabskich i symboli matematycznych; wykonywanie pisemnych obliczeń; interpretacja

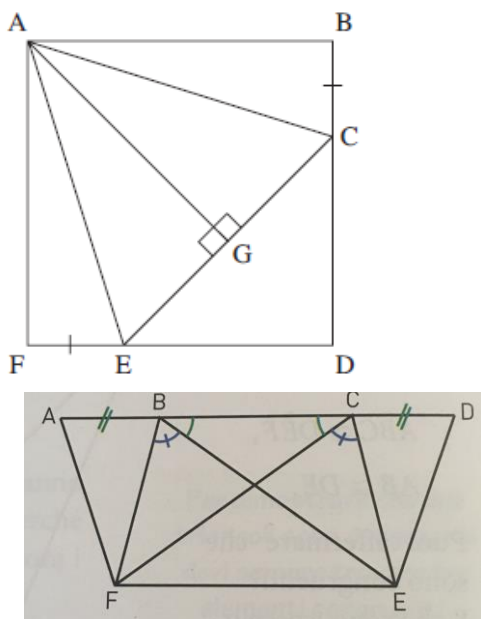
<sup>1</sup> The items are taken from the interactive list at <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>



Ponieważ ten materiał do pracy z uczniami dotyczy aktywności geometrycznej, rozważamy teorię Duvala dotyczącą różnych poznawczych ujęć figur, jako sposób na zobaczenie, skonstruowanie i opisanie figury geometrycznej i jej właściwości. Model Duvala jest szczególnie interesujący, ponieważ dotyczy zrozumienia rozwoju procesów poznawczych ujawnianych podczas rozwiązywania problemów geometrii (Duval, 1998). Duval (1995) proponuje teorię analityczną do analizy procesów myślowych związanych z czynnością geometryczną. W rzeczywistości w poznawczym modelu rozumowania geometrycznego Duvala figura odgrywa kluczową rolę:

- Figura daje nam przestrzenną reprezentację sytuacji geometrycznej, która jest krótsza i łatwiejsza do zrozumienia niż przedstawienie z mową lingwistyczną.
- Istnieją różne poznawcze ujęcia figur, dzięki którym możliwe jest obserwowanie, konstruowanie i opisywanie figury geometrycznej i jej właściwości:
  1. Rozumowanie percepcyjne
  2. Sekwencyjne zatrzymanie
  3. Dyskursywne rozumienie
  4. Zatrzymanie operacyjne

1. Rozumowanie percepcyjne: chodzi o fizyczne rozpoznanie (kształt, przedstawienie, rozmiar, jasność itp.) postrzeganej figury. Powinniśmy także rozróżniać i rozpoznawać kształty podrzędne w postrzeganych figurach, ponieważ odpowiednie rozróżnienie lub rozpoznanie tych jednostek może pomóc i dać wskazówki do rozwiązywania problemów w sytuacjach geometrycznych.



Na przykład figura cząstkowa FBE i FCE, które również się nakładają.

2. Rozumowanie sekwencyjne: dotyczy konstrukcji figury lub opisu jej konstrukcji. Taka konstrukcja zależy od ograniczeń technicznych, a także od właściwości matematycznych, ponieważ konstrukcja figury może łączyć różne jednostki. Uważa się, że konstrukcja może pomóc w rozpoznaniu zależności między właściwościami matematycznymi a ograniczeniami technicznymi.

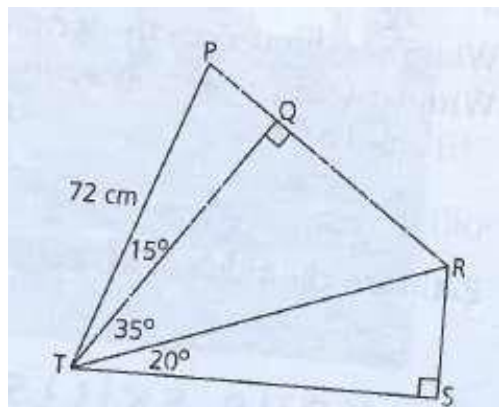
3. Dyskursywne rozumienie: Chodzi o (a) umiejętność połączenia konfiguracji z zasadami geometrycznymi, (b) umiejętność dobrego opisu, wyjaśnienia, argumentacji, dedukcji, użycia symboli, rozumowania w zależności od postawionych twierdzeń oraz (c) umiejętność opisywania figur za pomocą języka geometrycznego / tekstów narracyjnych



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

4. Rozumowanie operacyjne: chodzi o dokonanie modyfikacji danej figury na różne sposoby w celu zbadania innych konfiguracji:

- Sposób mereologiczny: podzielenie całej danej figury na części o różnych kształtach i połączenie tych części w inną figurę lub figury podrzędne;
- Sposób optyczny: zróżnicowanie wielkości figur; możesz uczynić kształt większym, węższym lub skośnym, kształty mogą wyglądać inaczej;
- Sposób miejsca: zmiana pozycji lub orientacji.



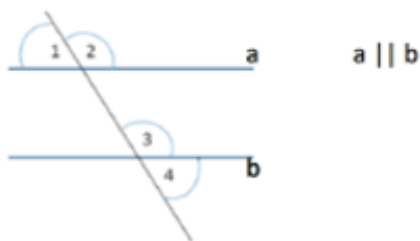
### 3. Opis projektu

#### 3.1 Trudności zidentyfikowane za pomocą kwestionariusza B2

Wykryto trudności w punkcie:

2. Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa...

3.



Które zdania są prawdziwe?

- A. Kąty 1 i 4 są równe
- B. Kąty 2 i 3 mają sumę  $180^\circ$
- C. Kąty 1 i 2 mają sumę  $180^\circ$
- D. Kąt 3 jest większy niż kąt 2

Trudności dotyczą:

- odtworzenia twierdzenia z pamięci
- wizualizacji i interpretacji informacji zawartych na rysunku

#### 3.2 Dziedzina poznawcza i dział matematyki

Obszar trudności zidentyfikowany za pomocą kwestionariusza B2 jest powiązany z działem Geometria.

Pamięć jest zaangażowanym obszarem poznawczym.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

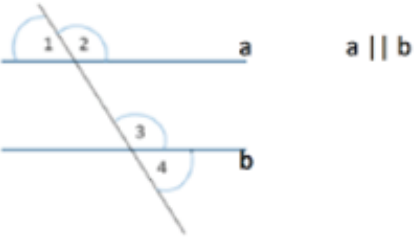
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

W tabeli 1 przedstawiono trudności w odniesieniu do domeny poznawczej i działu matematycznego.

Table 1: trudności w odniesieniu do domeny poznawczej i działu Geometria

	Arytmetyka	Geometria	Algebra
Pamięć		 <p>Które zdania są prawdziwe?</p> <p>A. Kąty 1 i 4 są równe</p> <p>B. Kąty 2 i 3 mają sumę <math>180^\circ</math></p> <p>C. Kąty 1 i 2 mają sumę <math>180^\circ</math></p> <p>D. Kąt 3 jest większy niż kąt 2</p>	
Rozumowanie			
Wizualizacja przestrzenna			

### 3.3 Cele edukacyjne

Narzędzie interwencyjne ma na celu opracowanie strategii w celu wyszukania twierdzeń geometrycznych, własności figur i ich zapamiętania, aby następnie wykorzystać je do przeprowadzenia rozumowania.

### 3.4 Adresowanie do Ucznia / klasy

Narzędzie interwencyjne jest adresowane do ucznia lub całej klasy.

### 3.5 Działania edukacyjne: narzędzie interwencyjne

Punktem wyjścia do zaprojektowania zajęć edukacyjnych jest sposób przedstawienia treści zadania (np. Zadanie wymagające zademonstrowania twierdzenia geometrycznego), warunkuje on pamięć roboczą i umiejętność wydobywania z pamięci informacji (zasady UDL).

W zadaniu gdzie występuje dowód geometryczny pamięć jest wykorzystywana w celu:

- wyszukania twierdzenia i informacji
- wyszukania hipotez (przedstawionych w tekście zadania)
- opracowania planu, który następnie zostanie zademonstrowany.

Funkcja edukacyjna tego narzędzia interwencji ma na celu wspieranie metapoznania. Narzędzie interwencyjne promuje rozwój strategii, które pozwalają uczniom wspierać pamięć w jej różnej, wspomnianej powyżej funkcji. W szczególności ta aktywność koncentruje się na tym, aby odtworzyć z pamięci twierdzenie (w celu pozyskania informacji, które mają być wykorzystane).

### Zapamiętywanie i odzyskiwanie twierdzeń i informacji

Aby zapamiętać i odtworzyć z pamięci twierdzenia i informacje, przydatne wydaje się przedstawienie ich treści za pomocą dynamicznych reprezentacji,



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

na przykład za pomocą funkcji GeoGebra. W rzeczywistości aplikacja GeoGebra wspiera zdolność rozpoznawania podobieństw w prezentowanych przykładach z omawianym twierdzeniem.

### ZADANIE 1

Mając na celu wizualizację twierdzenia, poprzez pokazanie związków miarowych między kątami utworzonymi przez parę prostych równoległych przeciętych trzecią prostą, zadanie to można przedstawić wykorzystując aplikację matematyczną GeoGebra.

Na rysunku 2 możesz zobaczyć zrzut ekranu ze strony GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>), gdzie funkcja przeciągania i dynamika ruchu GeoGebra są wykorzystywane do wizualizacji figury geometrycznej, którą można przy pomocy GeoGebra przekształcać.

Celem zadania jest użycie funkcji przeciągania do wyświetlenia różnych konfiguracji skojarzonych z twierdzeniem. Pozwala to na ukształtowanie idei uogólnienia figury geometrycznej związanej z twierdzeniem i pozwala stworzyć rodzaj bazy danych, możliwych do przywołania obrazów, które są pomocne przy formułowaniu twierdzenia o prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.

### Krok 1

Ten aplet pokazuje prawidłowości między kilkoma kątami utworzonymi przez parę prostych równoległych przeciętych trzecią prostą. Zauważenie tych prawidłowości jest możliwe dzięki funkcji przeciągania prostych, jak i opcji zmiany miary kątów. W pierwszym przypadku proste zmieniają swoje nachylenie zachowując równoległość. W drugim przypadku kąty zmieniają swoje miary, zachowując własności kątów odpowiadających i naprzemianległych.

≡ GeoGebra

Parallel Lines & Transversals

Properties of Parallel Lines

Angles Formed by Parallel Lines an...

Move the points on the parallel lines and/or the transversal & select different angle relationships using the checkboxes. As you shift the lines, notice the angle measures.

$124^\circ = 124^\circ$

Alternate Interior Same Side Interior Corresponding

Alternate Exterior Same Side Exterior

1  2  1  2  1  2

3  4

1  2  1  2

Rysunek 2: (dynamiczna) weryfikacja zależności między kilkoma kątami utworzonymi przez parę prostych równoległych przeciętych trzecią prostą



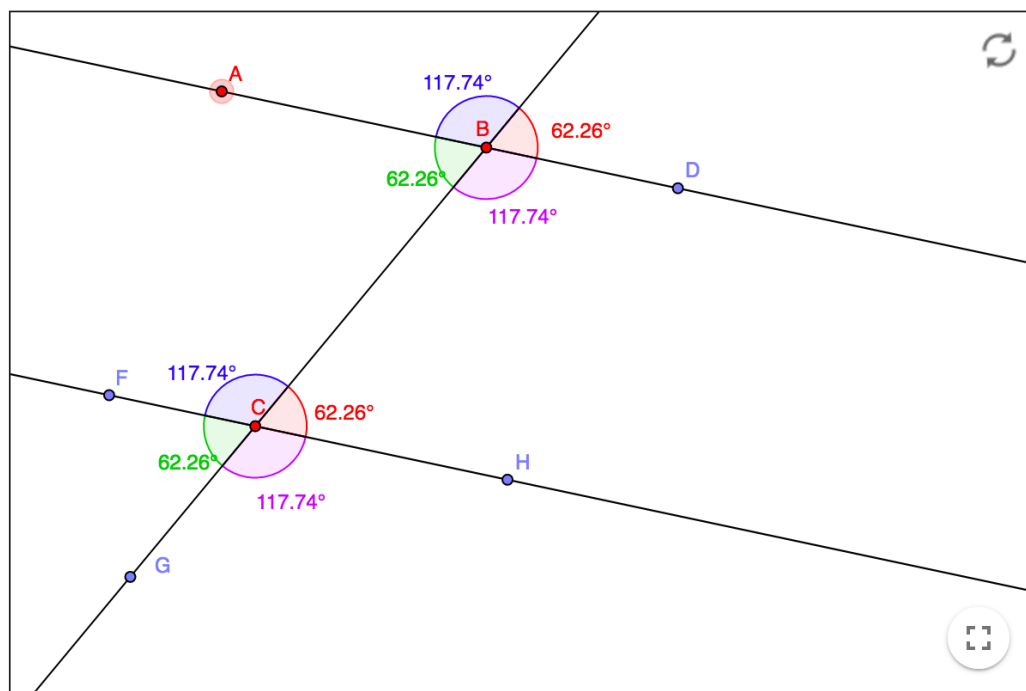
Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Na rysunku 3 możesz zobaczyć zrzut ekranu ze strony GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3Bu>), gdzie wykorzystano dynamiczny rysunek figury geometrycznej.

## Krok 2

Proste AB i FC są równoległe. Prosta BC przecina proste równoległe AB i FC. Przesuń punkty A, B i C, tak aby zmienić miary kątów. Jakie związki między kątami powstają, gdy prosta przecina dwie proste równoległe? Dokonaj jak największej liczby obserwacji.



Rysunek 3: (dynamiczna) weryfikacja zależności między kątami utworzonymi przez parę prostych równoległych przeciętych trzecią prostą

Zwróć uwagę, że kolory pozwalają uczniom skupić się na kilku kątach, pomijając kod numeryczny.

## 4. Bibliografia

- [1] Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- [2] Duval, R.: 1995, 'Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing', in R. Sutherland and J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- [3] Duval, R.: 1998, 'Geometry from a cognitive point a view', in C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.
- [4] UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>
- [5] GeoGebra materials: <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>
- [6] <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3BuA>