



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

## Materiały do pracy z uczniami

# Wspomaganie pamięci w procesie demonstracji geometrycznej

### 1. Wstęp

W celu opracowania zestawu działań edukacyjnych mających na celu rozwiązanie problemów, które dotyczą wspierania pamięci w geometrii, odwołujemy się do kilku istotnych teorii, które zostaną opisane w sesji 2. W sekcji 3 opisano projekt zajęć edukacyjnych. Opisano w szczególności, czy zajęcia są skierowane do jednego ucznia, czy do całej klasy, jaki jest cel edukacyjny zajęć, obszar poznawczy i dziedzina matematyki oraz jakich obszarów trudności zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2 zadania dotyczą.

### 2. Wprowadzenie teoretyczne

Teoretyczne odniesienia, które pomogły nam skonstruować materiały do pracy z uczniami, to:

1) Zasady UDL (**Universal Design for Learning**), będące wytycznymi stworzonymi specjalnie do projektowania włączających działań edukacyjnych (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Zasady UDL

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESJI
	“dlaczego” się uczę	“czego” się uczę	“jak” się uczę
Dostanę	<b>Wzbudzenie zainteresowania:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię</li> <li>• Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność</li> <li>• Ograniczaj zagrożenia i elementy rozprasające</li> </ul>	<b>Postrzeganie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji</li> <li>• Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio</li> <li>• Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych</li> </ul>	<b>Działania fizyczne:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu</li> <li>• Zapewnij optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających</li> </ul>
Tworzę	<b>Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zwiększ znaczenie celów i zadań</li> <li>• Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie</li> <li>• Wspieraj współpracę i poczucie przynależności</li> <li>• Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału</li> </ul>	<b>Język i symbole:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wyjaśniaj słownictwo i symbole</li> <li>• Wyjaśniaj składnię i budowę zdań</li> <li>• Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli</li> <li>• Propaguj zrozumienie w różnych językach</li> <li>• Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu</li> </ul>	<b>Ekspresja i komunikacja:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Używaj różnorodnych metod komunikacji</li> <li>• Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia</li> <li>• Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności</li> </ul>
Stosuję	<b>Samoregulacja:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację</li> <li>• Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami</li> <li>• Rozwijaj samoocenę i refleksję</li> </ul>	<b>Rozumienie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uaktywniaj lub zapewnij posiadaną wiedzę podstawową</li> <li>• Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeganie związków</li> <li>• Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją</li> <li>• Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację</li> </ul>	<b>Funkcja wykonawcza:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów</li> <li>• Wspieraj planowanie i rozwój strategii</li> <li>• Ułatwiaj zarządzanie informacjami i zasobami</li> <li>• Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów</li> </ul>
	Wykreowanie uczniów, którzy....		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są zaradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel

Centrum Specjalnej Technologii Stosowanej (CAST) opracowało kompleksowe ramy dotyczące koncepcji UDL, mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się (Edyburn, 2005). UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w wytycznych i punktach kontrolnych. Badania, na których opiera się struktura UDL, wskazują, że „uczniowie bardzo różnie reagują na



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

instrukcje. [...] " Dlatego UDL koncentruje się na tych indywidualnych różnicach jako na ważnym elemencie zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.

W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) zapewnienie różnorodnych środków prezentacji, 2) zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji, 3) zapewnienie różnorodnych środków angażujących. W szczególności wytyczne w ramach pierwszej zasady dotyczą środków percepcji związanych z otrzymywaniem pewnych informacji oraz „zrozumienia” otrzymanych informacji. Zamiast tego, wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji i pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą domeny „afektu” i „motywacji”, które są również istotne w każdej działalności edukacyjnej. W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach tych trzech zasad<sup>1</sup>.

Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewnienie różnorodnych sposobów prezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Co więcej, wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie zrozumienia wzorców, cech wyróżniających, oryginalnych pomysłów i związków między pojęciami matematycznymi. Wreszcie, nasze analizy dadzą przykłady, w jaki sposób oprogramowanie AINuSet może kierować przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia. Co więcej, wytyczne zawarte w Zasadzie 2 (zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenia i elementy rozprasające.

W części 4 przeanalizujemy przykłady działań, klasyfikując je zarówno według typu uczenia matematycznego, jak i obszaru poznawczego, które wspierają. Pokażemy, jak te przykłady zostały zaprojektowane zgodnie z zasadami UDL, aby były działaniami włączającymi i skutecznymi w przewyżnianiu trudności matematycznych zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach trzech Zasad. W celu scharakteryzowania trudności uczniów w geometrii odwołujemy się do następujących elementów twierdzeń Karagiannakisa i współpracowników (tab. 1), które dotyczyły pamięci w wyszukiwaniu faktów geometrycznych i przetwarzaniu geometrycznym: wyszukiwanie faktów geometrycznych, zapamiętywanie twierdzeń, zapamiętywanie hipotez i tez, na których się koncentrujemy.

Tabela 1: Model Karagiannakisa i współpracowników: dziedziny czterotorowego modelu i zestawy umiejętności matematycznych związanych z każdą z nich

dziedzina matematyki	Umiejętności matematyczne związane z daną dziedziną
liczby	Dokładne oszacowanie małej liczby obiektów (do 4); szacowanie przybliżonych ilości; umieszczanie liczb na osiach liczbowych; operowanie symbolami arabskimi; transkodowanie liczby z jednej reprezentacji na drugą (rzymskie-arabskie-werbalne); świadomość zasad liczenia
pamięć	Przypominanie sobie faktów; dekodowanie terminologii (licznik, mianownik, równoramienne, równoboczne); zapamiętywanie twierdzeń i wzorów; płynne wykonywanie obliczeń w myślach; zapamiętywanie procedur i śledzenie kroków
rozumowanie	Uchwycenie pojęć, idei i relacji matematycznych; zrozumienie wielu etapów złożonych procedur / algorytmów; uchwycenie podstawowych zasad logicznych (warunkowość – „jeśli ... wtedy ...” stwierdzenia - przemienność, inwersja); uchwycenie semantycznej struktury problemów; (strategiczne) podejmowanie decyzji;

<sup>1</sup> The items are taken from the interactive list at <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





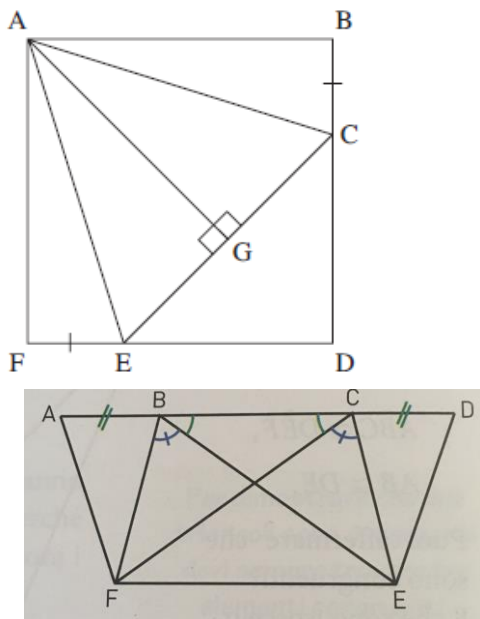
Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

	uogólnienie
<b>wizualizacja przestrzenna</b>	Interpretacja i wykorzystanie przestrzennej organizacji reprezentacji obiektów matematycznych (na przykład liczby w notacji dziesiętnej, wykładniki, figury geometryczne 2D i 3D lub obroty); umieszczanie liczb na osi liczbowej; mylenie cyfr arabskich i symboli matematycznych; wykonywanie pisemnych obliczeń; interpretacja wykresów i tabel

Ponieważ ten materiał do pracy z uczniami dotyczy aktywności geometrycznej, rozważamy teorię Duvala dotyczącą różnych poznawczych ujęć figur, jako sposób na zobaczenie, skonstruowanie i opisanie figury geometrycznej i jej właściwości. Model Duvala jest szczególnie interesujący, ponieważ dotyczy zrozumienia rozwoju procesów poznawczych ujawnianych podczas rozwiązywania problemów geometrii (Duval, 1998). Duval (1995) proponuje teorię analityczną do analizy procesów myślowych związanych z czynnością geometryczną. W rzeczywistości w poznawczym modelu rozumowania geometrycznego Duvala figura odgrywa kluczową rolę:

- Figura daje nam przestrzenną reprezentację sytuacji geometrycznej, która jest krótsza i łatwiejsza do zrozumienia niż przedstawienie z mową lingwistyczną.
- Istnieją różne poznawcze ujęcia figur, dzięki którym możliwe jest obserwowanie, konstruowanie i opisywanie figury geometrycznej i jej właściwości:
  1. Rozumowanie percepcyjne
  2. Sekwencyjne zatrzymanie
  3. Dyskursywne rozumienie
  4. Zatrzymanie operacyjne

1. Rozumowanie percepcyjne: chodzi o fizyczne rozpoznanie (kształt, przedstawienie, rozmiar, jasność itp.) postrzeganej figury. Powinniśmy także rozróżniać i rozpoznawać kształty podrzędne w postrzeganych figurach, ponieważ odpowiednie rozróżnienie lub rozpoznanie tych jednostek może pomóc i dać wskazówki do rozwiązywania problemów w sytuacjach geometrycznych.



Na przykład figura cząstkowa FBE i FCE, które również się nakładają.

2. Rozumienie sekwencyjne: dotyczy konstrukcji figury lub opisu jej konstrukcji. Taka konstrukcja zależy od ograniczeń technicznych, a także od właściwości matematycznych,



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



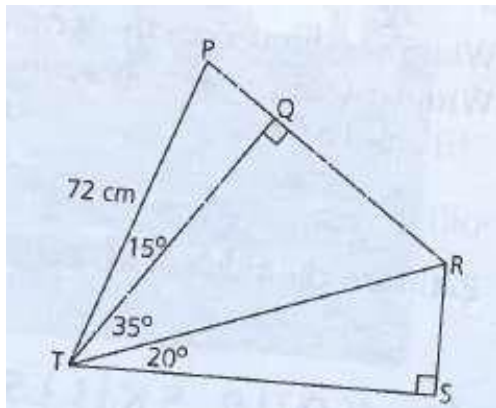
Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

ponieważ konstrukcja figury może łączyć różne jednostki. Uważa się, że konstrukcja może pomóc w rozpoznaniu zależności między właściwościami matematycznymi a ograniczeniami technicznymi.

3. Dyskursywne rozumienie: Chodzi o (a) umiejętność połączenia konfiguracji z zasadami geometrycznymi, (b) umiejętność dobrego opisu, wyjaśnienia, argumentacji, dedukcji, użycia symboli, rozumowania w zależności od postawionych twierdzeń oraz (c) umiejętność opisywania figur za pomocą języka geometrycznego / tekstów narracyjnych

4. Rozumowanie operacyjne: chodzi o dokonanie modyfikacji danej figury na różne sposoby w celu zbadania innych konfiguracji:

- Sposób mereologiczny: podzielenie całej danej figury na części o różnych kształtach i połączenie tych części w inną figurę lub figury podrzędne;
- Sposób optyczny: zróżnicowanie wielkości figur; możesz uczynić kształt większym, węższym lub skośnym, kształty mogą wyglądać inaczej;
- Sposób miejsca: zmiana pozycji lub orientacji.

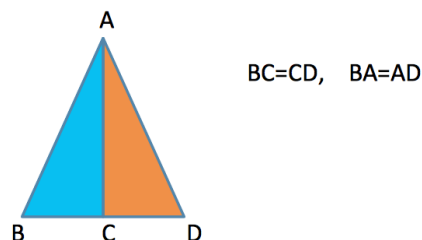


### 3. Opis projektu

#### 3.1 Trudności zidentyfikowane za pomocą kwestionariusza B2

Wystąpiły trudności w następujących pozycjach kwestionariusza B2 związanych z działem Geometria:

1)



Jakim trójkątem jest trójkąt CDA?  
Jakim trójkątem jest trójkąt BDA?

Trudności dotyczą:

- przenoszenia nieustannie uwagi z tekstu pisanego na rysunek i odwrotnie, aby pamiętać o informacjach uzyskanych z tekstu
- zaprezentowania na rysunku informacji uzyskanych na podstawie hipotezy



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

- przetwarzania informacji (użycia ich do przeprowadzenia dowodu)

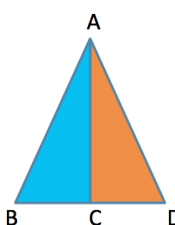
### 3.2 Dziedzina poznawcza i dział matematyki

Obszar trudności zidentyfikowany za pomocą kwestionariusza B2 jest powiązany z działem Geometria.

Pamięć jest zaangażowanym obszarem poznawczym.

W tabeli 2 umiejscowiono trudności w odniesieniu do domeny poznawczej i działu matematycznego.

Tabela 2: Wykryte trudności są związane z kognitywną dziedziną pamięci i geometrią

	Arytmetyka	Geometria	Algebra
Pamięć		 <p>BC=CD, BA=AD</p> <p>Jakim trójkątem jest trójkąt CDA? Jakim trójkątem jest trójkąt BDA?</p>	
Rozumowanie			
Wizualizacja przestrzenna			

### 3.3 Cele edukacyjne

Narzędzie interwencyjne ma na celu konstruowanie strategii w celu wyszukania faktów geometrycznych i twierdzeń lub właściwości, zapamiętania ich i wykorzystania do przeprowadzenia wniosku.

### 3.4 Adresowanie do Ucznia / klasy

Narzędzie interwencyjne jest adresowane do ucznia lub całej klasy.

### 3.5 Działania edukacyjne: narzędzie interwencyjne

Punktem wyjścia do projektowania tego rodzaju zajęć edukacyjnych jest sposób przedstawienia tekstu zadania (np. Tekst wymagający udowodnienia twierdzenia geometrycznego) wpływa na pamięć roboczą i zdolność do pozyskania z pamięci informacji (zasady UDL).

W zadaniu dotyczącym dowodu geometrycznego pamięć jest wykorzystywana w celu:

- pozyskania twierdzenia i informacji (patrz narzędzie interwencyjne „Wspieranie pamięci w zapamiętywaniu teorii”)
- pamiętania o hipotezach (przedstawionych w tekście zadania)
- opracowania planu, aby przeprowadzić dowód



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Działania edukacyjne tego narzędzia interwencyjnego mają na celu wspieranie metapoznania. Promują rozwój strategii, które pozwalają uczniom wspierać pamięć w jej różnych funkcjach: odzyskiwaniu twierdzeń (w celu wywnioskowania informacji w celu ich wykorzystania), pamiętaniu o informacjach uzyskanych z tekstu (hipoteza) i przetwarzaniu informacji w takiej kolejności aby dojść do wymaganej tezy (patrz także: Narzędzia interwencyjne umiejscowione w obszarze Rozumowanie oraz Geometria).

### **Pamiętaj o hipotezach (przedstawionych w tekście zadania)**

Według Duvala (1995) rysunek jest pewną formą podpory w kontekście geometrycznym daje nam figuralną reprezentację sytuacji geometrycznej, która jest krótsza i łatwiejsza do zrozumienia niż przedstawienie za pomocą słów.

W ten sposób, aby uniknąć ciągłego przenoszenia uwagi wzrokowej ucznia z tekstu pisanego na rysunek w celu zapamiętania informacji uzyskanych z tekstu, nauczyciel promuje wizualizację poprzez rysowanie informacji uzyskanych w formie ustnej poprzez tekst. Student proszony jest o odtworzenie hipotez za pomocą rysunku poprzez dobór odpowiednich znaków graficznych w kodzie wizualnym niewerbalnym. Znaki odnoszą się do znaczeń związanych z hipotezami. Dlatego wymagane jest transkodowanie informacji.

Nauczyciel wprowadza różne znaki graficzne do przedstawienia informacji o figurze geometrycznej (lub, bardziej ogólnie, o hipotezie) w wizualnej, niewerbalnej formie.

Innymi słowy, nauczyciel promuje proces transkodowania.

W praktyce, gdy student zidentyfikuje hipotezy (w tym względnie zobacz także Narzędzia interwencyjne w rozumowaniu w geometrii) w tekście zadania, musi je przedstawić za pomocą rysunku, aby przetworzyć je poprzez wyszukanie faktów geometrycznych (twierdzenie). Te meta-działania z konieczności obejmują aspekty wizualno-przestrzenne. W tym celu sugerujemy rozważenie również narzędzi interwencyjnych odnoszących się do obszaru wizualno-przestrzennego w geometrii.

Główne reprezentacje semiotyczne to:

- Znaki graficzne na rysunku
- Zabarwienie
- Użycie specjalnego materiału do wspomaganie wizualizacji (np. kolorowych przezroczystych arkuszy)

1)



Rysunek 1: przezroczyste kolorowe figury



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

## Przykłady zadań

### ZADANIE 1

Rozważmy trójkąt równoramienny ABD, C jest punktem leżącym na boku BD, a  $BC = CD$ . Jakim trójkątem jest trójkąt CDA? Jakim trójkątem jest trójkąt BDA?

Zwróć uwagę, że tekst zadania przedstawiony jest wyłącznie za pomocą rejestru słownego.

**Krok 1:** identyfikacja hipotez

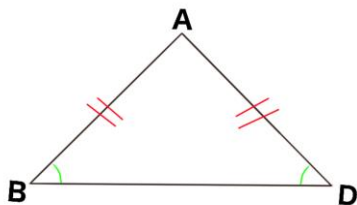
- trójkąt równoramienny ABD
- C to punkt leżący na boku BD, tak, że  $BC = CD$
- A jest wierzchołkiem trójkąta przeciwległym do podstawy BD (hipoteza ukryta).

**Krok 2:** Przetwarzanie informacji i odtworzenie twierdzenia

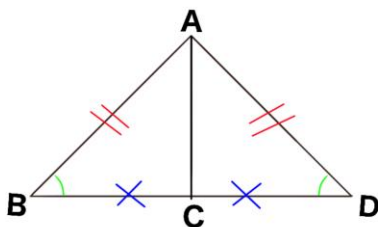
- narysowanie trójkąta równoramiennego o podstawie BD
- Trójkąt równoramienny ABD  $\rightarrow AD = AB$ , kąt o wierzchołku w punkcie B jest równy kątowi o wierzchołku w punkcie D [odbywa się to poprzez zapamiętanie twierdzenia o trójkącie równoramiennym].
- C jest punktem leżącym na boku BD, tak, że  $BC = CD \rightarrow$  C jest środkiem BD  $\rightarrow$  C jest spodkiem wysokości padającej na podstawę BD [wiemy o tym pamiętając o twierdzeniu o wysokości w trójkącie równoramiennym]  $\rightarrow$  AC wysokość trójkąta poprowadzona do BD.

**Krok 3:** Proces transkodowania

- 1) Trójkąt równoramienny ABD  $\rightarrow AD = AB$ , kąt o wierzchołku w punkcie B jest równy kątowi o wierzchołku w punkcie D



- 2) C jest punktem leżącym na boku BD, tak, że  $BC = CD \rightarrow$  C jest środkiem BD  $\rightarrow$  C jest spodkiem wysokości padającej na podstawę BD



**Krok 4:** Proces rysowania w celu udowodnienia tezy:

Jakim trójkątem jest trójkąt CDA? Jakim rodzajem trójkąta jest trójkąt BDA?

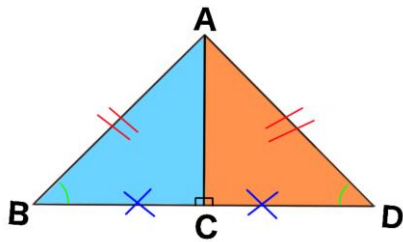


Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



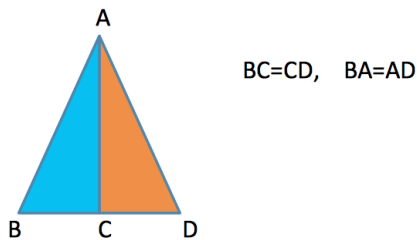
Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Zwróć uwagę, że kolory pozwalają uczniom zidentyfikować własności, na których należy się skoncentrować. Innymi słowy, kolory pozwalają uczniom na operatywne rozumienie (Duval, 1995) w celu zbadania innych konfiguracji.

## TASK 2

Rozważ trójkąt ABD przedstawiony na rysunku,



Jakim trójkątem jest trójkąt CDA? Jakim trójkątem jest trójkąt BDA?

### Krok 1: Identyfikacja hipotez

Hipotezy należy zidentyfikować w tekście (trójkąt ABD), na rysunku dodanym do tekstu (trójkąty niebieski i pomarańczowy oraz trójkąt ABD) oraz w kodzie słownym dodanym do rysunku ( $BC = CD$ ,  $BA = AD$ ). Tak więc kod werbalny i kod liczbowy przedstawiają następujące hipotezy: Jest „duży” trójkąt (o nazwie ABD), jest to trójkąt równoramienny, w tym trójkącie występuje środkowa poprowadzona na podstawę, dzieli ona trójkąt dwa trójkąty (niebieski i pomarańczowy)

Możemy zauważyć, że w przypadku czarno-białego rysunku wizualizacja dwóch trójkątów (BCA i DCA) nie jest tak dostrzegalna, jak w przypadku kolorowych trójkątów.

Dlatego użycie kolorów stało się ważnym narzędziem w celu:

- pamiętania o hipotezach (przedstawionych w tekście zadania)
- przetwarzania informacji.

Dotyczy to domeny wizualno-przestrzennej, ponieważ uczniowie interpretują i wykorzystują organizację przestrzenną reprezentacji kolorowych trójkątów w celu przetwarzania informacji i przeprowadzenia rozumowania w zadaniu geometrycznym (patrz Narzędzia interwencyjne w Wizualizacji przestrzennej w Geometrii)

### Krok 2: Przetwarzanie informacji

- AC dzieli podstawę BD trójkąta równoramiennego ABD na połowy
- AC jest wysokością i środkową trójkąta padającą na podstawę BD



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



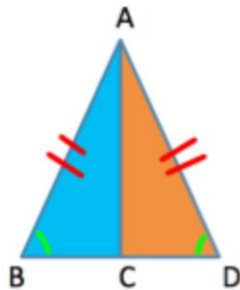


Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

- Niebieski i pomarańczowy trójkąt to trójkąty prostokątne

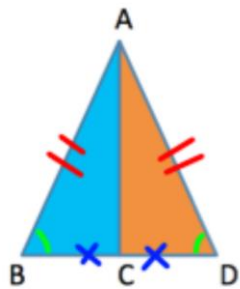
**Krok 3:** Proces transkodowania

1)  $BC=CD$ ,  $BA=AD$   $\rightarrow$  BDA jest trójkątem równoramiennym



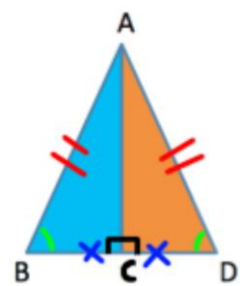
$BC=CD$ ,  $BA=AD$

2) AC jest wysokością trójkąta i środkową



$BC=CD$ ,  $BA=AD$

4) Niebieski i pomarańczowy trójkąt to trójkąty prostokątne



$BC=CD$ ,  $BA=AD$

#### 4. Bibliografia

- 1) Duval, R.: (1995), Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing, in R. Sutherland and J. Mason (eds.), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- 2) Duval, R. (1998), Geometry from a cognitive point a view, in C. Mammana and V. Villani (eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

- 3) Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- 4) UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>
- 5) GeoGebra materials: <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>
- 6) <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3BuA>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.