

Materiały do pracy z uczniami

Rozwijanie wizualizacji przestrzennej w geometrii

1. Wstęp

W celu opracowania zestawu działań edukacyjnych mających na celu rozwiązanie problemów, które dotyczą wizualizacji przestrzennej w geometrii, odwołujemy się do kilku istotnych teorii, które zostaną opisane w sesji 2. W sekcji 3 opisano projekt zajęć edukacyjnych. Opisano w szczególności, czy zajęcia są skierowane do jednego ucznia, czy do całej klasy, jaki jest cel edukacyjny zajęć, obszar poznawczy i dziedzina matematyki oraz jakich obszarów trudności zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2 zadania dotyczą.

2. Wprowadzenie teoretyczne

Teoretyczne odniesienia, które pomogły nam skonstruować materiały do pracy z uczniami, to:

1) Zasady UDL (**Universal Design for Learning**), będące wytycznymi stworzonymi specjalnie do projektowania włączających działań edukacyjnych (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Zasady UDL

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESJI
	"dlaczego" się uczę	"czego" się uczę	"jak" się uczę
Dostęp	Wzbudzenie zainteresowania: <ul style="list-style-type: none"> Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność Ograniczaj zagrożenia i elementy rozpraszające 	Postrzeżenie: <ul style="list-style-type: none"> Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych 	Działania fizyczne: <ul style="list-style-type: none"> Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu Zapewnij optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających
Tworzenie	Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości: <ul style="list-style-type: none"> Zwiększ znaczenie celów i zadań Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie Wspieraj współpracę i poczucie przynależności Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału 	Język i symbole: <ul style="list-style-type: none"> Wyjaśnij słownictwo i symbole Wyjaśnij składnię i budowę zdań Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli Propaguj zrozumienie w różnych językach Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu 	Ekspresja i komunikacja: <ul style="list-style-type: none"> Używaj różnorodnych metod komunikacji Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności
Stosowanie	Samoregulacja: <ul style="list-style-type: none"> Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami Rozwijaj samoocenę i refleksję 	Rozumienie: <ul style="list-style-type: none"> Uaktywniaj lub zapewnij posiadaną wiedzę podstawową Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeżenie związków Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację 	Funkcja wykonawcza: <ul style="list-style-type: none"> Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów Wspieraj planowanie i rozwój strategii Ułatwaj zarządzanie informacjami i zasobami Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów
	Wykreowanie uczniów, którzy....		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są sąradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel

Centrum Specjalnej Technologii Stosowanej (CAST) opracowało kompleksowe ramy dotyczące koncepcji UDL, mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się (Edyburn, 2005). UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w wytycznych i punktach kontrolnych. Badania, na których opiera się struktura UDL, wskazują, że „uczniowie bardzo różnie reagują na instrukcje. [...]” Dlatego UDL koncentruje się na tych indywidualnych różnicach jako na ważnym elemencie zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.

W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) zapewnienie różnorodnych środków prezentacji, 2) zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji, 3) zapewnienie różnorodnych środków



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

angażujących. W szczególności wytyczne w ramach pierwszej zasady dotyczą środków percepcji związanych z otrzymywaniem pewnych informacji oraz „zrozumienia” otrzymanych informacji. Zamiast tego, wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji i pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą domeny „afektu” i „motywacji”, które są również istotne w każdej działalności edukacyjnej. W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach tych trzech zasad¹.

Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewnienie różnorodnych sposobów prezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Co więcej, wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie zrozumienia wzorców, cech wyróżniających, oryginalnych pomysłów i związków między pojęciami matematycznymi. Wreszcie, nasze analizy dadzą przykłady, w jaki sposób oprogramowanie AINuSet może kierować przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia. Co więcej, wytyczne zawarte w Zasadzie 2 (zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenia i elementy rozpraszające.

W części 4 przeanalizujemy przykłady działań, klasyfikując je zarówno według typu uczenia matematycznego, jak i obszaru poznawczego, które wspierają. Pokażemy, jak te przykłady zostały zaprojektowane zgodnie z zasadami UDL, aby były działaniami włączającymi i skutecznymi w przewyżczeniu trudności matematycznych zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach trzech Zasad. W celu scharakteryzowania trudności uczniów w geometrii odwołujemy się do następujących elementów twierdzeń Karagiannakisa i współpracowników (tab. 1), które dotyczyły pamięci w wyszukiwaniu faktów geometrycznych i przetwarzaniu geometrycznym: wyszukiwanie faktów geometrycznych, zapamiętywanie twierdzeń, zapamiętywanie hipotez i tez, na których się koncentrujemy.

Tabela 1: Model Karagiannakisa i współpracowników: dziedziny czterotorowego modelu i zestawy umiejętności matematycznych związanych z każdą z nich

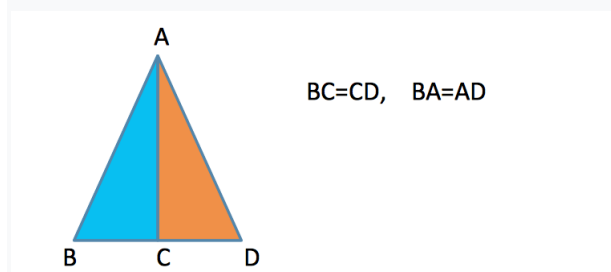
dziedzina matematyki	Umiejętności matematyczne związane z daną dziedziną
liczby	Dokładne oszacowanie małej liczby obiektów (do 4); szacowanie przybliżonych ilości; umieszczanie liczb na osiach liczbowych; operowanie symbolami arabskimi; transkodowanie liczby z jednej reprezentacji na drugą (rzymskie-arabskie-wербalne); świadomość zasad liczenia
pamięć	Przypominanie sobie faktów; dekodowanie terminologii (licznik, mianownik, równoramienne, równoboczne); zapamiętywanie twierdzeń i wzorów; płynne wykonywanie obliczeń w myślach; zapamiętywanie procedur i śledzenie kroków
rozumowanie	Uchwycenie pojęć, idei i relacji matematycznych; zrozumienie wielu etapów złożonych procedur / algorytmów; uchwycenie podstawowych zasad logicznych (warunkowość – „jeśli ... wtedy ...” stwierdzenia - przemienność, inwersja); uchwycenie semantycznej struktury problemów; (strategiczne) podejmowanie decyzji; uogólnienie
wizualizacja przestrzenna	Interpretacja i wykorzystanie przestrzennej organizacji reprezentacji obiektów matematycznych (na przykład liczby w notacji dziesiętnej, wykładniki, figury geometryczne 2D i 3D lub obroty); umieszczanie liczb na osi liczbowej; mylenie cyfr arabskich i symboli matematycznych; wykonywanie pisemnych obliczeń; interpretacja wykresów i tabel



3. Opis projektu

3.1 Trudności zidentyfikowane za pomocą kwestionariusza B2

Wykrywamy trudności w następującym punkcie B2:



Jak nazywamy trójkąt CDA?

Jak nazywamy trójkąt BDA?

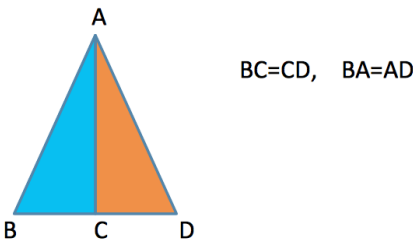
Trudności związane są z procesem wizualizacji, który odnosi się do wykorzystania figury (rysunku) do zilustrowania obiektów geometrycznych i manipulowania tą figurą w celu połączenia konfiguracji (konfiguracji) z zasadami geometrii.

3.2 Obszar poznawczy i dziedzina matematyki będąca przedmiotem zainteresowania

Obszar trudności zidentyfikowany za pomocą kwestionariusza B2 jest powiązany z dziedziną geometrii - wizualizacja przestrzenna to obszar poznawczy.

W tabeli 2 umiejscowienie trudności w odniesieniu do domeny poznawczej i obszaru matematycznego.

Tabela 2: Wykryte trudności są powiązane z domeną poznawczą wizualizacji przestrzennej oraz w dziedzinie geometrii

	Arytmetyka	Geometria	Algebra
Pamięć			
Rozumowanie			
Wizualizacja przestrzenna		 <p>BC=CD, BA=AD</p> <p>Jakim trójkątem jest CDA? Jakim trójkątem jest BDA?</p>	

3.3 Cele edukacyjne

Narzędzie interwencji ma na celu wsparcie procesu wizualizacji, który odnosi się do wykorzystania figur i obrazów do ilustracji, eksploracji lub weryfikacji różnych sytuacji geometrycznych.

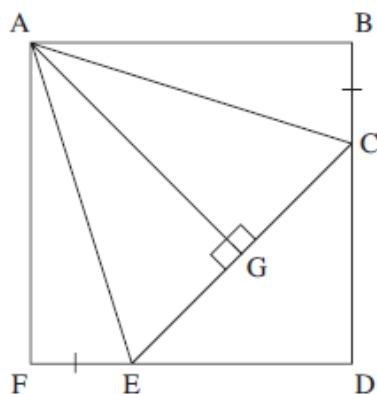
3.4 Adresowanie do ucznia / klasy

Narzędzie interwencji składa się z dwóch czynności, które należy wykonać z uczniem lub całą klasą.

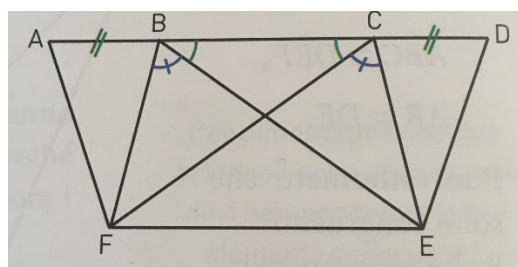
3.5 Działania edukacyjne: narzędzie interwencji

Zgodnie z poznawczym modelem rozumowania geometrycznego Duvala figura odgrywa kluczową rolę (Duval, 1995). W rzeczywistości figura daje nam figuralną reprezentację sytuacji geometrycznej, która jest krótsza i łatwiejsza do zrozumienia niż przedstawienie z mową lingwistyczną (w tym

Co więcej, Duval odwołuje się do różnych poznawczych ujęć postaci, traktowanych jako sposób widzenia, konstruowania i opisywania figury geometrycznej i jej właściwości. 1. Obawa percepcyjna: Chodzi o fizyczne rozpoznanie (kształt, przedstawienie, rozmiar, jasność itp.) Postrzeganej postaci. Powinniśmy również rozróżniać i rozpoznawać liczby podrzędne w postrzeganych liczbach, ponieważ odpowiednie rozróżnienie lub rozpoznanie tych jednostek liczb podrzędnych może pomóc i dać wskazówki do rozwiązywania problemów w sytuacjach geometrycznych.

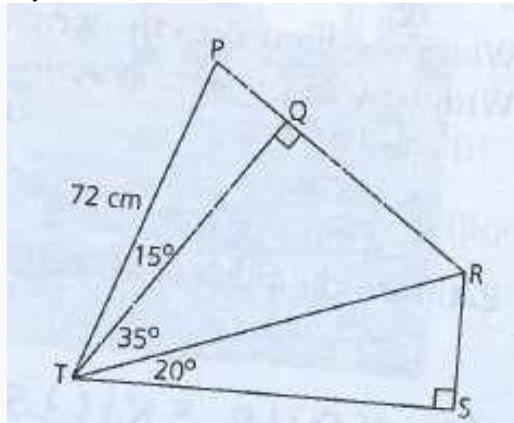


Lub na poniższym rysunku



Na przykład liczby częściowe FBE i FCE, które również się nakładają.

2. Rozumienie sekwencyjne: chodzi o konstrukcję figury lub opis jej konstrukcji. Taka konstrukcja zależy od ograniczeń technicznych, a także od właściwości matematycznych, ponieważ konstrukcja figury może łączyć różne jednostki figuralne. Uważa się, że konstrukcja może pomóc w rozpoznaniu zależności między właściwościami matematycznymi a ograniczeniami technicznymi.
3. Dyskursywne rozumienie: Chodzi o (a) umiejętność połączenia konfiguracji z zasadami geometrycznymi, (b) umiejętność dobrego opisu, wyjaśnienia, argumentacji, dedukcji, użycia symboli, rozumowania w zależności od stwierdzeń dotyczących zrozumienia percepcji oraz (c) umiejętność opisywania figur za pomocą języka / narracji geometrycznej tekstu.
4. Rozumowanie operacyjne: chodzi o dokonanie modyfikacji danej figury na różne sposoby w celu zbadania innych konfiguracji: - Sposób mereologiczny: podzielenie całej danej figury na części o różnych kształtach i połączenie tych części w inną figurę lub figury podrzędne; - Sposób optyczny: różnicowanie wielkości figur; możesz uczynić kształt większym, węższym lub skośnym, kształty mogą wyglądać inaczej; - Sposób miejsca: zmiana pozycji lub orientacji.

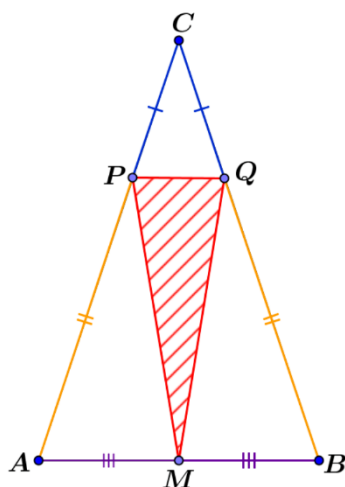


W szczególności rozumowanie percepcyjne i rozumowanie operacyjne są ściśle związane z wizualizacją figury: W tym celu działania edukacyjne tego narzędzia interwencyjnego są pomyślane jako meta-działania mające na celu opracowanie strategii, które pozwalają uczniom wspierać zarówno rozumienie percepcyjne, jak i operacyjne.

Wizualizacja relacji poprzez dynamiczne reprezentacje Geometryczna konstrukcja figury za pomocą narzędzi cyfrowych, takich jak GeoGebra, wydaje się skuteczna w rozróżnianiu i rozpoznawaniu figur podrzędnych w postrzeganych figurach. W rzeczywistości funkcja przeciągania, dostępna w tego rodzaju narzędziach, umożliwia uczniom identyfikację niezmienników geometrycznych i przeciąganie nałożonych na siebie figur poprzez rozpoznanie zależności między właściwościami matematycznymi a ograniczeniami technicznymi. Ponadto dynamiczna modyfikacja elementów geometrycznych pozwala studentom zidentyfikować relacje między nimi. Na przykład rozważmy następujące zadanie:

ZADANIE 1 W trójkącie równoramiennym ABC wyznacza środek M podstawy AB. Weź punkt P po stronie AC i punkt Q po stronie BC taki, że jest to $CP \cong CQ$. Pokaż, że trójkąt MPQ również wydaje się być równoramienny

Uczniowie są przywiązani do: - Skonstruuj w GeoGebra wymaganą liczbę, aby była odporna na przeciąganie (patrz konstrukcja GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/MaUCMhcM>); - Przesuń punkty P i Q, A i B w celu zidentyfikowania niezmienników. To, o co tu chodzi, to operacyjne ujęcie figury poprzez zmianę wielkości figur. Zwróć uwagę, że rysunek można pokolorować, tak jak na rysunku 1. Kolor wspiera postrzeganie percepcji, promując wizualizację pod-liczb i ich relacji.



Hp.:

$$AC \cong CB$$

$$AM \cong MB$$

$$A, P, C: \text{all.ti}$$

$$B, Q, C: \text{all.ti}$$

$$CP \cong CQ$$

Th.:

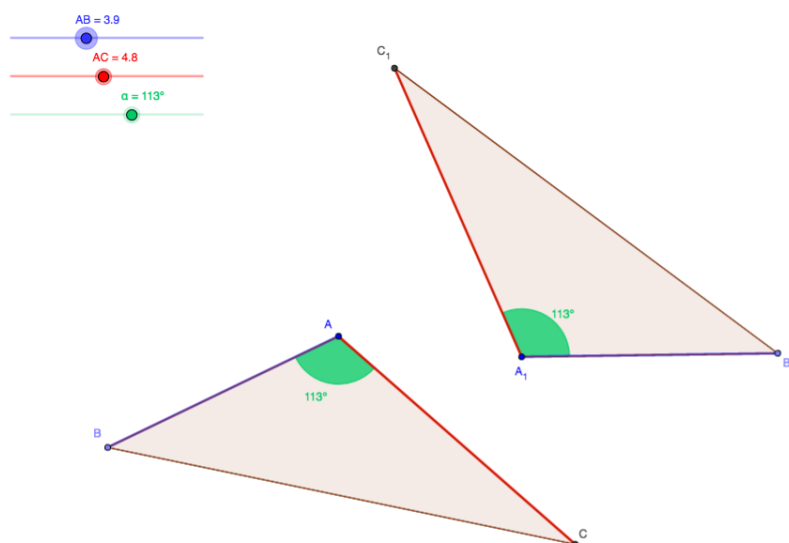
$$PM \cong QM$$

ZADANIE 2:

Zapewnij uczniom przystające trójkąty ABC i $A'B'C$ w GeoGebraze (Rysunek 2) skonstruowane za pomocą makra, tak aby poprzez zmianę wartości AB , AC lub α uczniowie mogli identyfikować niezmienniki i wizualizować właściwości.

Studenci proszeni są o:

- Zmień wartość AB , AC lub α . Umożliwia to uczniom wykonywanie zarówno obawy percepcyjnej, jak i operacyjnej
- Opisz, jakie zmiany nastąpiły, a co nie zmieniono w ABC i $A'B'C$. Innymi słowy, jest poproszony o zidentyfikowanie niezmienników w trójkątach ABC i $A'B'C$



Rysunek 2: makro związane z pierwszym z kryteriów dla trójkątów przystających

Zauważ, że odpowiadające sobie dwa przystające boki trójkątów ABC i $A'B'C$ są pomalowane na niebiesko i czerwono. Podobnie kąty w \hat{A} i \hat{A}' są koloru zielonego, aby lepiej zidentyfikować je wewnątrz figury.

Aby zbadać z GeoGebra warunki, w których trójkąty są przystające, zobacz ćwiczenie pod następującym linkiem:

<https://www.geogebra. / m / thA4JzgH>

4. Bibliografia

- 1) Duval, R.: 1995a, 'Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing', in R. Sutherland and J. Mason (eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- 2) Duval, R.: 1998b, 'Geometry from a cognitive point a view', in C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.
- 3) Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- 4) UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>