



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

## Materiały do pracy z uczniami

# Zrozumienie właściwości potęgowania z wykorzystaniem umiejętności logicznych i manualnych

### 1. Wstęp

W celu opracowania zestawu działań edukacyjnych mających na celu rozwiązanie problemów, które dotyczą potęgowania, odwołujemy się do kilku istotnych teorii, które zostaną opisane w sesji 2. W sekcji 3 opisano projekt zajęć edukacyjnych. Opisano w szczególności, czy zajęcia są skierowane do jednego ucznia, czy do całej klasy, jaki jest cel edukacyjny zajęć, obszar poznawczy i dziedzina matematyki oraz jakich obszarów trudności zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2 zadania dotyczą.

### 2. Wprowadzenie teoretyczne

Teoretyczne odniesienia, które pomogły nam skonstruować materiały do pracy z uczniami, to:

1) Zasady UDL (**Universal Design for Learning**), będące wytycznymi stworzonymi specjalnie do projektowania włączających działań edukacyjnych (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Zasady UDL

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESJI
	“dlaczego” się uczę	“czego” się uczę	“jak” się uczę
Dostępn	<b>Wzbudzenie zainteresowania:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię</li> <li>• Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność</li> <li>• Ograniczaj zagrożenia i elementy rozpraszcające</li> </ul>	<b>Postrzeżenie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji</li> <li>• Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio</li> <li>• Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych</li> </ul>	<b>Działania fizyczne:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu</li> <li>• Zapewnij optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających</li> </ul>
Tworze	<b>Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zwiększ znaczenie celów i zadań</li> <li>• Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie</li> <li>• Wspieraj współpracę i poczucie przynależności</li> <li>• Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału</li> </ul>	<b>Język i symbole:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wyjaśniaj słownictwo i symbole</li> <li>• Wyjaśniaj składnię i budowę zdań</li> <li>• Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli</li> <li>• Propaguj zrozumienie w różnych językach</li> <li>• Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu</li> </ul>	<b>Ekspresja i komunikacja:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Używaj różnorodnych metod komunikacji</li> <li>• Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia</li> <li>• Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności</li> </ul>
Stosowa	<b>Samoregulacja:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację</li> <li>• Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami</li> <li>• Rozwijaj samoocenę i refleksję</li> </ul>	<b>Rozumienie:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uaktywniaj lub zapewnij posiadaną wiedzę podstawową</li> <li>• Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeżenie związków</li> <li>• Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją</li> <li>• Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację</li> </ul>	<b>Funkcja wykonawcza:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów</li> <li>• Wspieraj planowanie i rozwój strategii</li> <li>• Ułatwiał zarządzanie informacjami i zasobami</li> <li>• Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów</li> </ul>
	<b>Wykreowanie uczniów, którzy....</b>		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są zaradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel

Centrum Specjalnej Technologii Stosowanej (CAST) opracowało kompleksowe ramy dotyczące koncepcji UDL, mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się (Edyburn, 2005). UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w wytycznych i punktach kontrolnych. Badania, na których opiera się struktura UDL, wskazują, że „uczniowie bardzo różnie reagują na instrukcje. [...]” Dlatego UDL koncentruje się na tych indywidualnych różnicach jako na ważnym elemencie zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) zapewnienie różnorodnych środków prezentacji, 2) zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji, 3) zapewnienie różnorodnych środków angażujących. W szczególności wytyczne w ramach pierwszej zasady dotyczą środków percepcji związanych z otrzymywaniem pewnych informacji oraz „rozumienia” otrzymanych informacji. Zamiast tego, wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji i pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą domeny „afektu” i „motywacji”, które są również istotne w każdej działalności edukacyjnej. W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach tych trzech zasad<sup>1</sup>.

Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewnienie różnorodnych sposobów prezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Co więcej, wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie zrozumienia wzorców, cech wyróżniających, oryginalnych pomysłów i związków między pojęciami matematycznymi. Wreszcie, nasze analizy dadzą przykłady, w jaki sposób oprogramowanie AI<sub>NU</sub>Set może kierować przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia. Co więcej, wytyczne zawarte w Zasadzie 2 (zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenia i elementy rozpraszające.

W części 4 przeanalizujemy przykłady działań, klasyfikując je zarówno według typu uczenia matematycznego, jak i obszaru poznawczego, które wspierają. Pokażemy, jak te przykłady zostały zaprojektowane zgodnie z zasadami UDL, aby były działaniami włączającymi i skutecznymi w przewyżnianiu trudności matematycznych zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

## 2) Teoretyczne ramy uczenia się rozumowania matematycznego

Dyskusje i doniesienia na ten temat można znaleźć wszędzie, ale zawsze lepiej odnieść się do naszej podstawowej kultury, nawet na poziomie metodologicznym, stosując tradycję, która wywodzi się z kultury greckiej.

„Nauka matematyki, taka jak czytanie i pisanie, jest wynikiem kulturowego wyboru, który jest podstawą samej idei szkoły. Jest to rozwój inteligencji poprzez abstrakcję i myślenie symboliczne: przejście ze świata czystej percepcji, od „zdrowego rozsądku” do „racjonalnego dyskursu”, od zanurzenia się w pozorach i konkretnych rzeczach po abstrakcyjne byty, które pozwalają nam uzyskać pewną wiedzę. Ten cel edukacji został zarysowany w pracach Platona, który w matematyce identyfikuje studia które prowadzą na tej ścieżce.” (‘Numbers’ Ana Maria Millàn Gasca, pag. 105)

Niewątpliwie już przy Platońskiej koncepcji matematyki jako „paideia” (edukacji) możemy rozważyć i doceniać wagę zajęć dydaktycznych.

Platon w VII księdze Republiki przypisuje matematyce wielką siłę formacyjną: liczby, takie jak geometria („wiedza o tym, co zawsze jest”), zmuszają duszę do używania inteligencji, aby osiągnąć prawdę: „Czy kiedykolwiek widziałeś, jak te z natury zdolni do komputerów są gotowi i wytrawni w prawie wszystkich dyscyplinach i że późno, jeśli w tej dyscyplinie są wykształceni, czynią postępy i ćwiczą, nawet jeśli nie przedstawiają żadnej innej korzyści, jednak zdobywają i robią postęp?”

„Że w życiu rodzinnym, w życiu publicznym i we wszystkich rodzajach sztuki żadna dyscyplina edukacyjna nie jest tak skuteczna jak nauka o liczbach; ale najważniejsze jest to, że budzi ona tych, którzy z natury są senni i spóźnieni intelektualnie i czyni je gotowymi do nauki, z dobrą pamięcią i wnikliwością, czyniąc postęp przez boską sztukę ponad jej naturalne zdolności” (księga V).

Podstawowe działania są związane z życiem codziennym, rodziną, klasą i grupą, w celu rozwijania rozumowania i intuicji, nabywania świadomości i porządku psychicznego oraz budowania racjonalnych umiejętności przydatnych w doskonaleniu umiejętności we właściwościach władzy w odniesieniu do uczniów z określonymi trudnościami w uczeniu się.

## 3. Opis projektu

<sup>1</sup> The items are taken from the interactive list at <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

W ćwiczeniu z B2 znajdujemy pewne trudności:

Q4A1

$$a^2 \cdot a^3 = \dots\dots$$

$$(a^2)^3 = \dots\dots$$

### 3.1 Trudności zidentyfikowane dzięki kwestionariuszowi B2

Narzędzie interwencyjne jest prezentowane w odniesieniu do specyficznych trudności rozpoznanych/wykrytych w kwestionariuszu. Zasada uprawnienia nie jest natychmiastowa, zawsze trzeba zrobić logiczne połączenie, na przykład ze znaczeniem mnożenia. Dla ucznia jest kluczowe, aby miał jasną ogólną koncepcję liczb i działań.

### 3.2 Obszar poznawczy i dziedzina matematyczna zainteresowań

Obszar trudności zidentyfikowany w kwestionariuszu B2 jest powiązany z dziedziną algebry i rozumowania (Tabela1)

Tabela 1: Obszar trudności zidentyfikowany w kwestionariuszu B2 jest powiązany z dziedziną algebry i rozumowania

	Arytmetyka	Geometria	Algebra
Pamięć			
Rozumowanie			Q4A1
Wizualizacja przestrzenna			

### 3.3 Cele edukacyjne

To narzędzie interwencyjne pozwala zrozumieć i ulepszyć rozumowanie w algebrze na podstawie bardzo prostych przykładów, które pozwalają uczniom zrozumieć, w kilku krótkich fragmentach, właściwości potęg.

### 3.4 Adresowanie do ucznia/klasy

Narzędzie interwencji może być skierowane do klasy: nauczyciel grupuje uczniów na podstawie ich różnych poziomów kompetencji i angażuje ich w rozpoznawanie potęg.

### 3.5 Działania edukacyjne: narzędzie interwencji

W tej sekcji czynności zostały szczegółowo opisane.

Kroki interwencji:

- 1) Nauczyciel przypomina uczniom znaczenie potęgi liczby i pisze definicję. Potęga (lub wykładnik) liczby (lub innego elementu) mówi, ile razy należy użyć liczby (lub elementu) w mnożeniu. Potęga jest zapisana jako mała liczba po prawej stronie i powyżej liczby, podstawy.





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

$a^1 = a$	(1 raz)	→ ■ <sup>1</sup> = ■	(Użycie kwadratów jako elementów potęgi)
$a^2 = a \cdot a$	(2 razy)	→ ■ <sup>2</sup> = ■ · ■	
$a^3 = a \cdot a \cdot a$	(3 razy)	→ ■ <sup>3</sup> = ■ · ■ · ■	
$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$	(4 razy)	→ ■ <sup>4</sup> = ■ · ■ · ■ · ■	
...			

Aby uogólnić:

$a^n = a^n$  każe nam pomnożyć a przez siebie, więc jest n takich a:  
 $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  (n razy) → ■<sup>n</sup> = ■ · ■ · ■ · ... · ■

Tak więc wykładnik pomaga nam nie pisać wielu mnożeń.

2) Nauczyciel pokazuje zastosowanie definicji na przykładzie:

$a^2 \cdot a^3 = \dots$  ? Jak to może być rozwiązane?

Żaden problem, zastosuj definicję:

$$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{(2+3)}$$

↙ ↘ ↙ ↗  
2 razy 3 razy = 5 razy

W ten sam sposób z ogólnym i rzeczowym „symbolem pudełka” jako podstawą potęgi  
: ■<sup>2</sup> · ■<sup>3</sup> = (■ · ■) · (■ · ■ · ■) = ■<sup>5</sup>

W ten sam sposób z liczbą „2” użytą jako podstawą potęgi  
( $a = 2$  or ■ = 2):  $(2^2) \cdot (2^3) = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 = 32$

↓ ↓  
(4) · (8) = 32

Faktycznie zastosowana jest właściwość potęg:  
 $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ ;  $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

3) Teraz nauczyciel proponuje grupie uczniów, aby spróbowali rozwiązać niektóre potęgi tą samą metodą, na przykład:

$a^1 \cdot a^2 = \dots$

Kroki ucznia do rozwiązania =  $a \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a = a^3 = a^{(1+2)}$

$a^3 \cdot a^4 = \dots$

Kroki ucznia do rozwiązania =  $(a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7 = a^{(3+4)}$

4) Na tym etapie nauczyciel, omawiając na zajęciach, odkrywa ogólne prawo dotyczące potęg o tej samej podstawie:

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)} \qquad \qquad \qquad \blacksquare^m \cdot \blacksquare^n = \blacksquare^{(m+n)}$$

W kilku innych przykładach, jak w kroku 3, można uzyskać tę właściwość potęgi.

5) Teraz nauczyciel proponuje uczniom inne pytanie?

$(a^2)^3 = \dots$  ? Jak to może być rozwiązane?





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Nauczyciel stosuje definicję potęgi, ale z sugestią :

$$a^2 = a \cdot a = \blacksquare$$

Na przykład, jeśli  $\blacksquare = (\odot \cdot \odot)$  " w każdym pudełku są dwie piłki"

Więc możemy napisać pytanie w ten sposób: So, we can write the question in this way:  $(a^2)^3 = (\blacksquare)^3$

Stosując definicję potęgi:  $(a^2)^3 = (\blacksquare)^3 = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare$

Używając zamiany:

$$(a^2)^3 = (\blacksquare)^3 = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare = (\odot \cdot \odot) \cdot (\odot \cdot \odot) \cdot (\odot \cdot \odot)$$

Ile piłek znaleźliśmy?

$$\odot \cdot \odot \cdot \odot \cdot \odot \cdot \odot \cdot \odot = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$$

⇓⇓↗

6 piłek 6 razy

Więc można napisać:  $(a^2)^3 = a^{(2 \cdot 3)} = a^6$

6) Teraz, nauczyciel proponuje użycie tej reguły z określoną podstawą potęgi, na przykład podstawą potęgi 2:

$$(2^2)^3 = 2^{(2 \cdot 3)} = 2^6 = 64$$

a nauczyciel omawia z klasą, że to ćwiczenie również może zostać rozwiązane jako:

$$(2^2)^3 = (4)^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

7) W tym etapie nauczyciel proponuje grupie uczniów, aby spróbowali rozwiązać inne przykłady tą samą metodą:

$(a^3)^4 = \dots$  zakładając, że  $a^3 = (a \cdot a \cdot a) = \blacksquare$  -> to może być pudełko

i jeśli w tym pudełku mamy 3 piłki  $\blacksquare = (\odot \cdot \odot \cdot \odot)$  -> w polu wpisujemy liczbę kulek równą pierwszemu wykładnikowi

Stosując regułę, korzystając z definicji potęgi, każda grupa uczniów musi spróbować rozwiązać:

Etapy rozwiązania:

$$(\blacksquare)^4 = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare = (\odot \cdot \odot \cdot \odot) \cdot (\odot \cdot \odot \cdot \odot) \cdot (\odot \cdot \odot \cdot \odot) \cdot (\odot \cdot \odot \cdot \odot) = (12 \text{ piłek})$$

$$= (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{12} = a^{(3 \cdot 4)}$$

↓

(12 razy)

8) Nauczyciel prosi każdą grupę uczniów o wykorzystanie właściwości znalezionych potęg, używając różnych elementów lub liczb. Każda grupa musi wybrać dwa różne elementy i dwie różne liczby, w sumie cztery przykłady.

Każda grupa pokaże przykład, który uważa za bardziej reprezentatywny od innych.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

9) W ostatnim kroku, po tych przykładach i szeroko zakrojonej dyskusji, właściwość potęga potęgi może zostać sformalizowana jako prawo:

$$(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$$

$$(\blacksquare^m)^n = \blacksquare^{(m \cdot n)}$$

#### 4. Odniesienie zasad UDL do zaproponowanych ćwiczeń

Zwracamy uwagę, że ten sam cel edukacyjny „zabawy” jest realizowany na różne sposoby, działając zgodnie z trzema zasadami UDL (tabela 7, komentarze na czerwono ilustrują związek między zasadami a naszymi działaniami).

Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESJI
“czego” się uczyć	“jak” się uczyć
<b>Postrzeganie:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji</li><li>Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio</li><li>Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych</li></ul> <p>Zastosowanie symboli kwadracika i kulki</p>	<b>Działania fizyczne:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągnięcia celu</li><li>Zapewnij optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających</li></ul>
<b>Język i symbole:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Wyjaśnij słownictwo i symbole</li><li>Wyjaśnij składnię i budowę zdań</li><li>Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli</li><li>Propaguj zrozumienie w różnych językach</li><li>Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu</li></ul> <p>Graficzna reprezentacja</p>	<b>Ekspresja i komunikacja:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Używaj różnorodnych metod komunikacji</li><li>Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia</li><li>Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności</li></ul> <p>Praca w grupie jest łatwiejsza</p>
<b>Rozumienie:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Uaktywniaj lub zapewnij posiadaną wiedzę podstawową</li><li>Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeganie związków</li><li>Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją</li><li>Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację</li></ul> <p>Wykorzystanie fizycznego przedmiotu, aby namacalnie poczuć znaczenie potęgi Prawa przedstawiono na konkretnych przykładach w celu uogólnienia</p>	<b>Funkcja wykonawcza:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów</li><li>Wspieraj planowanie i rozwój strategii</li><li>Ułatwaj zarządzanie informacjami i zasobami</li><li>Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów</li></ul>

#### 5. Bibliografia

[1] Ana Maria MillànGasca (2016) 'Numbers and shapes', p.105 ed.Zanichelli

[2] Plato (bookV and VII of 'The Republic')

[3]<https://www.inclusiva-mente.it/le-proprieta-delle-potenze/>

[4] BARBARA URDANCH [ "Didattica, supporto, autonomia. Matematica " ed il Capitello]

[5] <https://www.mathsisfun.com/exponent.html>

[6][https://mathinsight.org/exponentiation\\_basic\\_rules](https://mathinsight.org/exponentiation_basic_rules)

[7]<https://www.mathplanet.com/education/algebra-1/exponents-and-exponential-functions/properties-of-exponents>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

[8]<https://study.com/academy/lesson/what-are-the-five-main-exponent-properties.html>

[9]<https://www.khanacademy.org/math/in-in-class-7th-math-cbse/x939d838e80cf9307:in-in-7th-powers-exponents/x939d838e80cf9307:in-in-7th-exponents-powers-exponents-properties-1/v/exponent-properties-1>

[10]<https://www.khanacademy.org/math/in-in-class-7th-math-cbse/x939d838e80cf9307:in-in-7th-powers-exponents/x939d838e80cf9307:in-in-7th-exponents-powers-exponents-properties-1/v/exponent-properties-3>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.