



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Materiały do pracy z uczniami

Nierówności $<$, $>$, \leq , \geq ,

1. Wstęp

W celu opracowania zestawu działań edukacyjnych mających na celu rozwiązanie problemów, które dotyczą nierówności, odwołujemy się do kilku istotnych teorii, które zostaną opisane w sesji 2. W sekcji 3 opisano projekt zajęć edukacyjnych. Opisano w szczególności, czy zajęcia są skierowane do jednego ucznia, czy do całej klasy, jaki jest cel edukacyjny zajęć, obszar poznawczy i dziedzina matematyki oraz jakich obszarów trudności zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2 zadania dotyczą.

2. Wprowadzenie teoretyczne

Teoretyczne odniesienia, które pomogły nam skonstruować materiały do pracy z uczniami, to:

1) Zasady UDL (**Universal Design for Learning**), będące wytycznymi stworzonymi specjalnie do projektowania włączających działań edukacyjnych (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Zasady UDL

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESJI
	"dlaczego" się uczę	"czego" się uczę	"jak" się uczę
Dostęp	Wzbudzenie zainteresowania: <ul style="list-style-type: none"> • Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię • Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność • Ograniczaj zagrożenia i elementy rozpraszcające 	Postrzeżenie: <ul style="list-style-type: none"> • Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji • Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio • Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych 	Działania fizyczne: <ul style="list-style-type: none"> • Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu • Zapewnij optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających
Tworzenie	Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości: <ul style="list-style-type: none"> • Zwiększ znaczenie celów i zadań • Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie • Wspieraj współpracę i poczucie przynależności • Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału 	Język i symbole: <ul style="list-style-type: none"> • Wyjaśniaj słownictwo i symbole • Wyjaśniaj składnię i budowę zdań • Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli • Propaguj zrozumienie w różnych językach • Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu 	Ekspresja i komunikacja: <ul style="list-style-type: none"> • Używaj różnorodnych metod komunikacji • Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia • Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności
Stosowanie	Samoregulacja: <ul style="list-style-type: none"> • Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację • Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami • Rozwijaj samoocenę i refleksję 	Rozumienie: <ul style="list-style-type: none"> • Uaktywniaj lub zapewnij posiadaną wiedzę podstawową • Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeżenie związków • Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją • Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację 	Funkcja wykonawcza: <ul style="list-style-type: none"> • Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów • Wspieraj planowanie i rozwój strategii • Ułatwiał zarządzanie informacjami i zasobami • Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów
	Wykreowanie uczniów, którzy....		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są zaradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel

Centrum Specjalnej Technologii Stosowanej (CAST) opracowało kompleksowe ramy dotyczące koncepcji UDL, mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się (Edyburn, 2005). UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

wytycznych i punktach kontrolnych. Badania, na których opiera się struktura UDL, wskazują, że „uczniowie bardzo różnie reagują na instrukcje. [...]” Dlatego UDL koncentruje się na tych indywidualnych różnicach jako na ważnym elemencie zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.

W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) zapewnienie różnorodnych środków prezentacji, 2) zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji, 3) zapewnienie różnorodnych środków angażujących. W szczególności wytyczne w ramach pierwszej zasady dotyczą środków percepcji związanych z otrzymywaniem pewnych informacji oraz „zrozumienia” otrzymanych informacji. Zamiast tego, wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji i pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą domeny „afektu” i „motywacji”, które są również istotne w każdej działalności edukacyjnej. W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach tych trzech zasad¹.

Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewnienie różnorodnych sposobów prezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Co więcej, wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie zrozumienia wzorców, cech wyróżniających, oryginalnych pomysłów i związków między pojęciami matematycznymi. Wreszcie, nasze analizy dadzą przykłady, w jaki sposób oprogramowanie AI \mathcal{N} uSet może kierować przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia. Co więcej, wytyczne zawarte w Zasadzie 2 (zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenia i elementy rozprasające.

W części 4 przeanalizujemy przykłady działań, klasyfikując je zarówno według typu uczenia matematycznego, jak i obszaru poznawczego, które wspierają. Pokażemy, jak te przykłady zostały zaprojektowane zgodnie z zasadami UDL, aby były działaniami włączającymi i skutecznymi w przewyżnianiu trudności matematycznych zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

2) Europejski projekt FasMed, który skupiał się na ocenianiu kształtującym w matematyce i naukach ścisłych, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

Ocenianie kształtujące (FA) jest pomyślane jako metoda nauczania, w której „nauczyciele, uczniowie lub ich rówieśnicy gromadzą, interpretują i wykorzystują dowody dotyczące osiągnięć uczniów, aby podejmować decyzje dotyczące kolejnych kroków w nauczaniu, które prawdopodobnie będą lepsze, lub lepiej uzasadnione, niż decyzje, które podjęliby w przypadku braku zebranych dowodów” (Black i Wiliam, 2009, s. 7). Projekt FaSMEd odnosi się do badania Wiliama i Thompsona (2007), które identyfikuje pięć kluczowych strategii oceniania kształtującego w środowisku szkolnym: (a) wyjaśnianie i dzielenie się zamiarami uczenia się i kryteriami sukcesu; (b) opracowywanie skutecznych dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dostarczają dowodów na zrozumienie przez uczniów; (c) dostarczanie informacji zwrotnych, które pomagają uczniom czynić postępy; (d) aktywizowanie uczniów, aby uczyli siebie nawzajem; (e) aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki. Nauczyciel, rówieśnicy ucznia i sam uczeń są autonomicznymi jednostkami, które aktywują te strategie oceniania kształtującego.

Table 4: Formative assessment strategies

	Gdzie zmierza uczeń	Gdzie uczeń jest teraz	Jak tam dotrzeć
Nauczyciel	1 Wyjaśnienie zamiarów uczenia się i kryteriów sukcesu	2 Zaaranżowanie efektywnej dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dają dowody	3 Dostarczanie informacji zwrotnych, które pomagają uczniom czynić postępy

¹ The items are taken from the interactive list at <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

	Zrozumienie i dzielenie się zamiarami uczenia się i kryteriami sukcesu	zrozumienia przez uczniów	
Rówieśnik		4 aktywizowanie uczniów, aby uczyli siebie nawzajem	
Uczeń	Zrozumienie zamiarów uczenia się i kryteriów sukcesu	5 aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki	

Ćwiczenia FaSMEd zostały zorganizowane w sekwencję, która obejmuje pracę grupową nad arkuszami roboczymi i dyskusję w klasie, podczas której wybrane prace grupowe są omawiane przez całą klasę przy wsparciu nauczyciela. Biorąc pod uwagę strategie oceny kształtującej i funkcje technologiczne, Cusi, Morselli i Sabena (2017, s. 758) zaprojektowali trzy rodzaje arkuszy roboczych do zajęć w klasie:

“(1) *arkusze zadań: arkusze wprowadzające problem i zadające jedno lub więcej pytań dotyczących interpretacji lub konstrukcji reprezentacji (werbalnej, symbolicznej, graficznej, tabelarycznej) relacji matematycznej między dwiema zmiennymi (np. interpretacja wykresu czas-odległość);*

(2) *arkusze pomocnicze, mające na celu wsparcie uczniów, którzy napotykają trudności z arkuszami zadań poprzez przedstawianie konkretnych sugestii (np. pytania pomocnicze);*

(3) *arkusze ankietowe: arkusze z pytaniami o ankietę wśród proponowanych opcji”.*

Autorzy zidentyfikowali strategie informacji zwrotnej (tabela 5), które nauczyciel może zastosować, aby przekazać uczniom informację zwrotną (Cusi, Morselli i Sabena, 2018, s.3466). Strategie te są wykorzystywane podczas dyskusji w klasie, która jest organizowana przez nauczyciela po pracy grupowej nad arkuszami roboczymi.

Table 5:

Powtórzenie	Kiedy nauczyciel naśladuje wypowiedź jednego ucznia, aby zwrócić na nią uwagę. Często podczas powtórzenia nauczyciel akcentuje intonacją głosu niektóre kluczowe słowa zdania, które powtarza po uczniu. Zmiana sformułowania ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułuje wypowiedź jednego ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i sprawienie by była bardziej zrozumiałą dla wszystkich.
Przeformułowanie	Przeformułowanie ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułuje wypowiedź jednego ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i uczynienie jej bardziej zrozumiałej dla wszystkich. Przeformułowanie jest stosowane, gdy nauczyciel uważa, że informacja może być przydatna, ale należy ją lepiej przekazać, aby stała się źródłem wiedzy dla innych. [...] Strategie powtórzenia i przeformułowania [...] zmieniają jednego ucznia (autora wypowiedzi) w źródło wiedzy dla klasy.
Przeformułowanie z materiałem pomocniczym	Kiedy nauczyciel, oprócz przeformułowania, dodaje elementy, które wspomagają pracę uczniów.
Ponowne uruchomienie	Kiedy nauczyciel reaguje na wypowiedź ucznia, którą uważa za interesującą dla klasy, nie udziela bezpośredniej informacji zwrotnej, ale stawia powiązane pytanie. W ten sposób, poprzez ponowne uruchomienie, nauczyciel dostarcza ukrytej informacji zwrotnej [...] na temat wypowiedzi ucznia, sugerując, że kwestia jest interesująca i warta pogłębienia lub, przeciwnie, ma pewne problematyczne punkty i należy ją przerobić.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Kontrastowanie	Kontrastowanie ma miejsce, gdy nauczyciel zwraca uwagę na dwie lub więcej wypowiedzi, przedstawiając dwie różne pozycje, aby ułatwić porównanie. Dzięki temu [...] autorzy obu wypowiedzi mogą być dla klasy źródłem wiedzy, a także stają się odpowiedzialni za własną naukę.
----------------	--

Z doświadczenia FaSMEd czerpiemy pomysł tworzenia zajęć w klasie w perspektywie oceniania kształtującego, co może sprzyjać integracji.

3. Projekt

Wykrywamy trudności w następującym punkcie B2:

W obszarze liczb pierwszych, porządkując liczby od najmniejszej do największej, uczniowie często mają trudności z określeniem, które liczby są większe, a które mniejsze, oraz trudności pojawiają się przy rozwiązywaniu nierówności;

3.2. Dziedzina poznawcza i dziedzina matematyki

Obszar trudności zidentyfikowany za pomocą kwestionariusza B2 jest związany z Arytmetyk. W szczególności trudności dotyczą sortowania liczb wymiernych na osi liczbowej. Zatem wizualizacja przestrzenna jest stosowana w obszarze poznawczym danej trudności.

3.3 Cele edukacyjne

Celem tego działania jest wytłumaczenie która liczba jest większa lub mniejsza od podanej liczby lub zmiennej.

3.4 Zadania są adresowane do ucznia / klasy

Narzędzie interwencyjne może być wykorzystane do całej klasy lub grupy uczniów.

3.5 Działania edukacyjne: narzędzie interwencji

Najlepiej byłoby, gdyby uczniowie mieli dostęp do komputerów lub tabletów i mogli wykonywać to ćwiczenie online, korzystając ze strony www.desmos.com (<http://tiny.cc/2bdysz>). Jednak to ćwiczenie można również wykonać za pomocą kopii papierowych i tablicy z markerami. Użycie interaktywnych narzędzi i oprogramowania pomoże wyjaśnić słownictwo oraz odczytywanie symboli $<$, $>$, \leq , \geq (wytyczne UDL).

Każdy uczeń indywidualnie wykonuje następujące zadanie:

- 1) Przeciągnij lub narysuj niebieski punkt w miejscu na osi liczbowej wskazującym liczbę mniejszą niż 3.

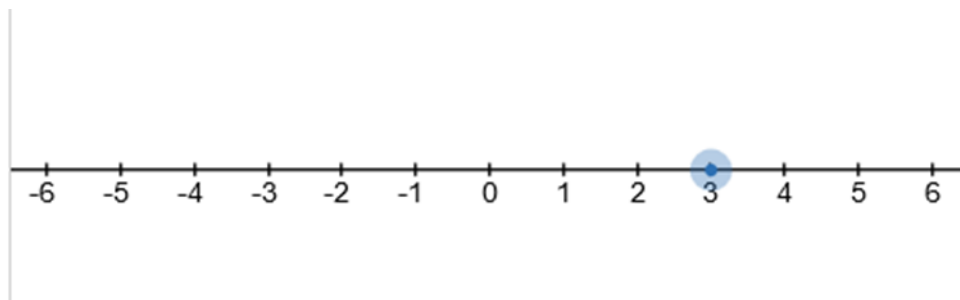


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



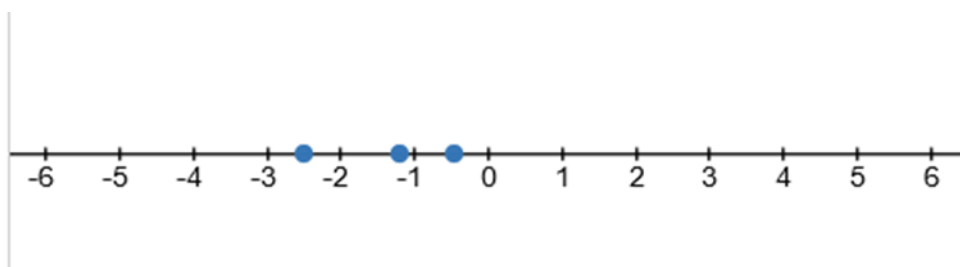
Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274



2) Przeciągnij lub narysuj niebieski punkt w INNYM miejscu na osi liczbowej, wskazując liczbę mniejszą niż 3.

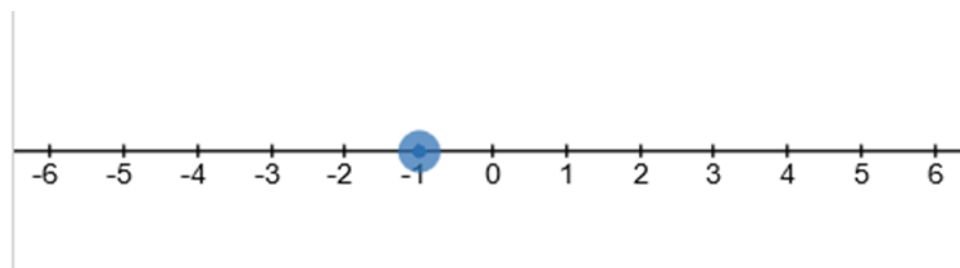
3) Przeciągnij lub narysuj niebieski punkt w JEDNEJ WIĘCEJ miejsce na osi liczbowej, wskazując liczbę mniejszą niż 3.

Następnie nauczyciel prosi uczniów, aby spojrzeli na linię na tablicy i umieścili swoje punkty. Tworzony przez nich wykres pokazuje wszystkie punkty, które umieścili uczniowie i ich koledzy z klasy.



Następnie uczniowie samodzielnie wykonują następujące zadanie.

1) Przeciągnij lub narysuj każdy niebieski punkt w miejscu na osi liczbowej wskazującym liczbę..... większą niż -1 .



2) Jak wyglądałby wykres, gdyby wszystkie punkty Twoich kolegów z klasy były pokazane razem z Twoimi?

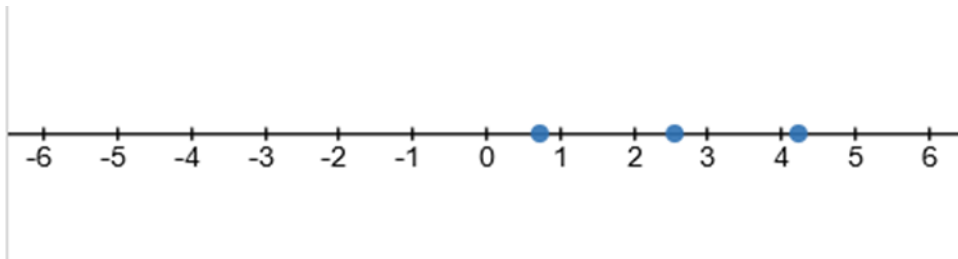


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



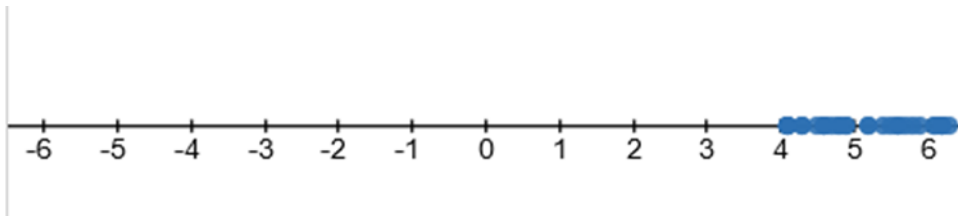
Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274



powyższy wykres przedstawia hipotetyczną odpowiedź jednego ucznia)

Uczniowie powinni zauważyć, że linia byłaby pokryta niebieskimi kropkami po prawej stronie -1

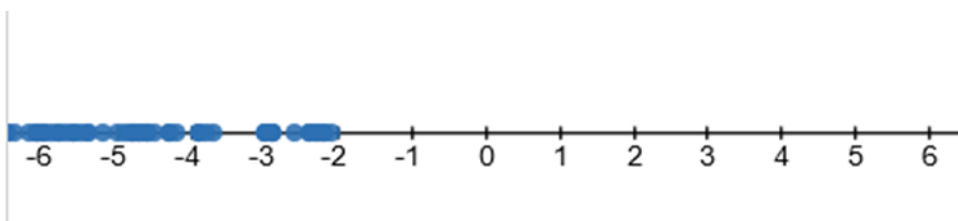
Następnie nauczyciel pokazuje uczniom następujący wykres i pyta uczniów „Jak wygląda rzeczywisty wykres w porównaniu z twoimi przewidywaniami?”



Uczniowie dyskutują w grupach, przedstawiając swoje pomysły.

Następnie nauczyciel daje im kolejne zadanie.

Oto wyniki z innego zadania. „Przeciągnij każdy punkt w miejsce na osi liczbowej wskazujące liczbę, która jest ...” Jak skończyłbyś te kierunki, aby grupa uczniów utworzyła wykres podobny do tego?



Uczniowie zaznaczają liczby na linii i próbują sformułować regułę. W ten sposób poczują się twórcami reguł matematycznych i będą czuli się bardziej pewni siebie.

Aby upewnić się, że uczniowie w pełni zrozumieli porównanie liczb, grają w dopasowywanie. Muszą podzielić karty na trzyosobowe grupy. (Powinny zostać dwie karty.) Nauczyciel wyjaśnia, że uczniowie muszą dopasować graficzną reprezentację na linii do symbolu nierówności lub wyrażenia.

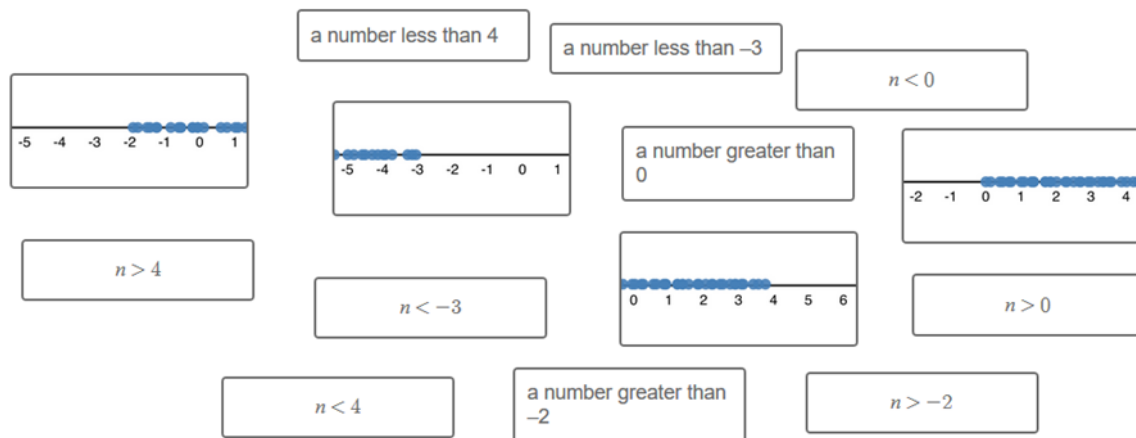


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

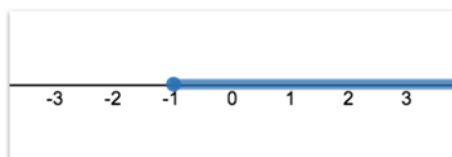
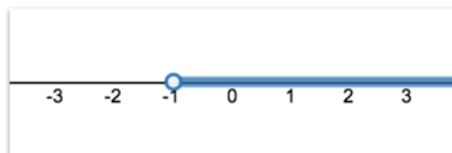


Po rozwiązaniu zadania nauczyciel pyta uczniów, czy kierunek strzałki w symbolach nierówności $<$ $>$ może pomóc im zdecydować, które liczby są mniejsze lub większe od podanej liczby. Uczniowie dyskutują i pogłębiają własne zrozumienie. Będą również mieli wspólne słownictwo i graficzną reprezentację. (FasMEd)

Następnym zadaniem jest upewnienie się, że uczniowie zauważą różnicę między symbolami

$<$ „Mniejszy niż” i \leq „mniejszy niż lub równy”

Uczniowie patrzą na dwa diagramy liczbowe. Dyskutują na temat „W jakim stopniu są podobni? Czym się różnią?”. Pozwoli to stworzyć efektywne dyskusje w klasie i inne zadania edukacyjne, które dostarczą dowodów zrozumienia przez uczniów. Uczniowie będą również dzielić się wspólnym słownictwem i wspólną reprezentacją graficzną. (FasMEd)



Nauczyciel przekazuje im informację zwrotną: „ pusta kropka (powyżej) oznacza, że nie ma wartości – 1. Zamalowana kropka (poniżej) oznacza, że jest. „

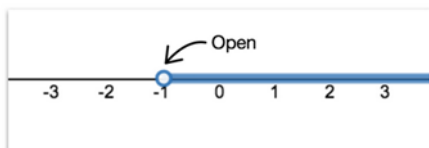


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Aby upewnić się, że uczniowie w pełni zrozumieli różnicę między $<$, $>$, \leq , \geq , grają w grę na dopasowywanie. Muszą podzielić karty na trzyosobowe grupy. (Powinny zostać dwie karty niewykorzystane).

Match each expression with its number line graph.

$x \leq 1$	$x > -2$		
	$x \geq -2$	$x > 1$	$x \leq -2$
	$x < 1$		

Na koniec, w grupach lub w parach, uczniowie analizują następujące elementy i odpowiadają na pytanie: Która z tych relacji wydaje się inna od pozostałych? Innymi słowy, który z nich nie pasuje?

$x > -2$	$3 < x$
$x \leq 4$	$5 > 6$

Uczniowie prowadzą dyskusję, aby wymyślić własne odpowiedzi. Oto wzorcowa odpowiedź:

- Lewy górny ($x > -2$): to ten, który zawiera zero i wszystkie liczby dodatnie.
- Prawy górny ($3 < x$): to ten który, który ma zmienną po prawej stronie.
- Na dole po lewej ($x \leq 4$): to ten, który zawiera punkt końcowy, wektor.
- Na dole po prawej ($5 > 6$): to ten, który zawsze jest nieprawidłowy.

4. Bibliografia



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

[1] Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141. <https://doi.org/10.1080/19404158.2017.1289963>

[2] Workshop with Dr. Giannis Karagianakis in International

[3] European Project FasMed (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

[4] Universal design for learning (UDL) principles (<http://udlguidelines.cast.org/>)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.