



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Materiały do pracy z uczniami

Dowodzenie twierdzeń – poziom zaawansowany

1. Wstęp

W celu opracowania zestawu działań edukacyjnych mających na celu rozwiązanie problemów, które dotyczą dowodzenia twierdzeń, odwołujemy się do kilku istotnych teorii, które zostaną opisane w sesji 2. Za pomocą narzędzia interwencji, które zostało stworzone dla całej klasy, uczniowie mogą zastanowić się nad procesem dowodzenia, ze szczególnym odniesieniem do kluczowych etapów, takich jak zrozumienie tekstu, identyfikacja hipotezy i tezy, przedstawienie hipotez na rysunku, uporządkowanie dowodu jako sekwencja logicznie połączonych instrukcji

Sugerujemy rozważenie narzędzia interwencji „Dowodzenie - poziom średniozaawansowany” przed rozpoczęciem tego. Narzędzie ma ten sam cel edukacyjny, z coraz większą trudnością dotyczącą stwierdzenia, które ma zostać udowodnione.

Narzędzie składa się z serii pytań, które nauczyciel może zadać uczniom podczas dyskusji w klasie. Pytania mogą być wyświetlane na tablicy. Jeżeli uczniowie mają do dyspozycji tablety lub komputery z połączeniem do internetu, pytania mogą być udzielane za pomocą interaktywnego systemu odpowiedzi (np. Sokrative, Mentimeter).

2. Wprowadzenie teoretyczne

Teoretyczne odniesienia, które pomogły nam skonstruować materiały do pracy z uczniami, to:

1) Zasady UDL (**Universal Design for Learning**), będące wytycznymi stworzonymi specjalnie do projektowania włączających działań edukacyjnych (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Zasady UDL

	Zapewnij różnorodne sposoby ZAANGAŻOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby PREZENTOWANIA	Zapewnij różnorodne sposoby DZIAŁANIA i EKSPRESJI
	“dlaczego” się uczyć	“czego” się uczyć	“jak” się uczyć
Dostęp	Wzbudzanie zainteresowania: <ul style="list-style-type: none"> • Optymalizuj indywidualny wybór i autonomię • Optymalizuj trafność, wartość i autentyczność • Ograniczaj zagrożenia i elementy rozpraszające 	Postrzeganie: <ul style="list-style-type: none"> • Zaproponuj sposoby dostosowania formy wyświetlania informacji • Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji audio • Zaproponuj alternatywne sposoby prezentowania informacji wizualnych 	Działania fizyczne: <ul style="list-style-type: none"> • Różnicuj metody udzielania odpowiedzi i osiągania celu • Zapewnij optymalny dostęp do narzędzi i technologii wspomagających
Tworzenie	Podtrzymywanie wysiłku i wytrwałości: <ul style="list-style-type: none"> • Zwiększ znaczenie celów i zadań • Różnicuj wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie • Wspieraj współpracę i poczucie przynależności • Zwiększ znaczenie informacji zwrotnej nastawionej na opanowanie materiału 	Język i symbole: <ul style="list-style-type: none"> • Wyjaśniaj słownictwo i symbole • Wyjaśniaj składnię i budowę zdań • Wspieraj rozumienie tekstu, zapisu matematycznego i symboli • Propaguj zrozumienie w różnych językach • Ilustruj za pomocą wielu środków przekazu 	Ekspresja i komunikacja: <ul style="list-style-type: none"> • Używaj różnorodnych metod komunikacji • Używaj różnorodnych narzędzi do tworzenia • Buduj biegłość dzięki stopniowemu wspieraniu działań praktycznych i wydajności
Stosowanie	Samoregulacja: <ul style="list-style-type: none"> • Kształtuj oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację • Wspieraj rozwój umiejętności i strategii radzenia sobie z problemami • Rozwijaj samoocenę i refleksję 	Rozumienie: <ul style="list-style-type: none"> • Uaktywniaj lub zapewnij posiadaną wiedzę podstawową • Podkreślaj podobieństwa, cechy wyróżniające, oryginalne pomysły i dostrzeganie związków • Kieruj przetwarzaniem informacji i wizualizacją • Maksymalizuj transfer wiedzy i generalizację 	Funkcja wykonawcza: <ul style="list-style-type: none"> • Wspieraj wyznaczanie odpowiednich celów • Wspieraj planowanie i rozwój strategii • Ułatwaj zarządzanie informacjami i zasobami • Wzmacniaj możliwości monitorowania postępów
	Wykreowanie uczniów, którzy....		
Cel	są zdecydowani i zmotywowani	są zaradni i kompetentni	myślą strategicznie i są ukierunkowani na cel



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Centrum Specjalnej Technologii Stosowanej (CAST) opracowało kompleksowe ramy dotyczące koncepcji UDL, mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się (Edyburn, 2005). UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w wytycznych i punktach kontrolnych. Badania, na których opiera się struktura UDL, wskazują, że „uczniowie bardzo różnie reagują na instrukcje. [...]” Dlatego UDL koncentruje się na tych indywidualnych różnicach jako na ważnym elemencie zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.

W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) zapewnienie różnorodnych środków prezentacji, 2) zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji, 3) zapewnienie różnorodnych środków angażujących. W szczególności wytyczne w ramach pierwszej zasady dotyczą środków percepcji związanych z otrzymywaniem pewnych informacji oraz „zrozumienia” otrzymanych informacji. Zamiast tego, wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji i pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą domeny „afektu” i „motywacji”, które są również istotne w każdej działalności edukacyjnej. W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych w ramach tych trzech zasad¹.

Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewnienie różnorodnych sposobów prezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Co więcej, wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie zrozumienia wzorców, cech wyróżniających, oryginalnych pomysłów i związków między pojęciami matematycznymi. Wreszcie, nasze analizy dadzą przykłady, w jaki sposób oprogramowanie AINuSet może kierować przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia. Co więcej, wytyczne zawarte w Zasadzie 2 (zapewnienie różnorodnych środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenia i elementy rozpraszające.

W części 4 przeanalizujemy przykłady działań, klasyfikując je zarówno według typu uczenia matematycznego, jak i obszaru poznawczego, które wspierają. Pokażemy, jak te przykłady zostały zaprojektowane zgodnie z zasadami UDL, aby były działaniami włączającymi i skutecznymi w przewyżnianiu trudności matematycznych zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

2) Europejski projekt FasMed, który skupiał się na ocenianiu kształtującym w matematyce i naukach ścisłych, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

Ocenianie kształtujące (FA) jest pomyślane jako metoda nauczania, w której „nauczyciele, uczniowie lub ich rówieśnicy gromadzą, interpretują i wykorzystują dowody dotyczące osiągnięć uczniów, aby podejmować decyzje dotyczące kolejnych kroków w nauczaniu, które prawdopodobnie będą lepsze, lub lepiej uzasadnione, niż decyzje, które podjęliby w przypadku braku zebranych dowodów” (Black i Wiliam, 2009, s. 7). Projekt FaSMEd odnosi się do badania Wiliama i Thompsona (2007), które identyfikuje pięć kluczowych strategii oceniania kształtującego w środowisku szkolnym: (a) wyjaśnianie i dzielenie się zamiarami uczenia się i kryteriami sukcesu; (b) opracowywanie skutecznych dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dostarczają dowodów na zrozumienie przez uczniów; (c) dostarczanie informacji zwrotnych, które pomagają uczniom czynić postępy; (d) aktywizowanie uczniów, aby uczyli siebie nawzajem; (e) aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki. Nauczyciel, rówieśnicy ucznia i sam uczeń są autonomicznymi jednostkami, które aktywują te strategie oceniania kształtującego.

Table 4: Formative assessment strategies

	Gdzie mierza uczeń	Gdzie uczeń jest teraz	Jak tam dotrzeć
Nauczyciel	1 Wyjaśnienie zamiarów uczenia się i kryteriów sukcesu	2 Zaaranżowanie efektywnej dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dają dowody zrozumienia przez uczniów	3 Dostarczanie informacji zwrotnych, które pomagają uczniom czynić postępy
Rówieśnik	Zrozumienie i dzielenie się zamiarami uczenia się i kryteriami sukcesu		

¹ The items are taken from the interactive list at <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Uczeń	Zrozumienie zamiarów uczenia się i kryteriów sukcesu	5 aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki
-------	------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------

Ćwiczenia FaSMEd zostały zorganizowane w sekwencję, która obejmuje pracę grupową nad arkuszami roboczymi i dyskusję w klasie, podczas której wybrane prace grupowe są omawiane przez całą klasę przy wsparciu nauczyciela. Biorąc pod uwagę strategię oceny kształtującej i funkcje technologiczne, Cusi, Morselli i Sabena (2017, s. 758) zaprojektowali trzy rodzaje arkuszy roboczych do zajęć w klasie:

“(1) arkusze zadań: arkusze wprowadzające problem i zadające jedno lub więcej pytań dotyczących interpretacji lub konstrukcji reprezentacji (werbalnej, symbolicznej, graficznej, tabelarycznej) relacji matematycznej między dwiema zmiennymi (np. interpretacja wykresu czas-odległość);

(2) arkusze pomocnicze, mające na celu wsparcie uczniów, którzy napotykają trudności z arkuszami zadań poprzez przedstawianie konkretnych sugestii (np. pytania pomocnicze);

(3) arkusze ankietowe: arkusze z pytaniami o ankietę wśród proponowanych opcji”.

Autorzy zidentyfikowali strategię informacji zwrotnej (tabela 5), które nauczyciel może zastosować, aby przekazać uczniom informację zwrotną (Cusi, Morselli i Sabena, 2018, s.3466). Strategie te są wykorzystywane podczas dyskusji w klasie, która jest organizowana przez nauczyciela po pracy grupowej nad arkuszami roboczymi.

Table 5:

Powtórzenie	Kiedy nauczyciel naśladuje wypowiedź jednego ucznia, aby zwrócić na nią uwagę. Często podczas powtórzenia nauczyciel akcentuje intonacją głosu niektóre kluczowe słowa zdania, które powtarza po uczniu. Zmiana sformułowania ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułuje wypowiedź jednego ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i sprawienie by była bardziej zrozumiałą dla wszystkich.
Przeformułowanie	Przeformułowanie ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułuje wypowiedź jednego ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i uczynienie jej bardziej zrozumiałej dla wszystkich. Przeformułowanie jest stosowane, gdy nauczyciel uważa, że informacja może być przydatna, ale należy ją lepiej przekazać, aby stała się źródłem wiedzy dla innych. [...] Strategie powtórzenia i przeformułowania [...] zmieniają jednego ucznia (autora wypowiedzi) w źródło wiedzy dla klasy.
Przeformułowanie z materiałem pomocniczym	Kiedy nauczyciel, oprócz przeformułowania, dodaje elementy, które wspomagają pracę uczniów.
Ponowne uruchomienie	Kiedy nauczyciel reaguje na wypowiedź ucznia, którą uważa za interesującą dla klasy, nie udziela bezpośredniej informacji zwrotnej, ale stawia powiązane pytanie. W ten sposób, poprzez ponowne uruchomienie, nauczyciel dostarcza ukrytej informacji zwrotnej [...] na temat wypowiedzi ucznia, sugerując, że kwestia jest interesująca i warta pogłębienia lub, przeciwnie, ma pewne problematyczne punkty i należy ją przerobić.
Kontrastowanie	Kontrastowanie ma miejsce, gdy nauczyciel zwraca uwagę na dwie lub więcej wypowiedzi, przedstawiając dwie różne pozycje, aby ułatwić porównanie. Dzięki temu [...] autorzy obu wypowiedzi mogą być dla klasy źródłem wiedzy, a także stają się odpowiedzialni za własną naukę.

Z doświadczenia FaSMEd czerpiemy pomysł tworzenia zajęć w klasie w perspektywie oceniania kształtującego, co może sprzyjać integracji.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Ponadto odwołujemy się do literatury badawczej dotyczącej podejścia do dowodzenia w szkole średniej. Balacheff (1982) wskazuje, że nauczanie o dowodach i twierdzeniach powinno mieć podwójny cel: sprawić, by uczniowie zrozumieli, czym jest dowód, i nauczyli się go tworzyć. Ważne jest, aby uczniowie rozumieli potrzebę dowodu, w przeciwnym razie istnieje ryzyko, że poczują się dowodem jak dyskursem mającym na celu pokazanie nauczycielowi, że uczeń posiada daną wiedzę (ryzyko dowodu jest postrzegane jako część kontraktu dydaktycznego, zamiast jako środek do potwierdzenia oświadczenia).

Balacheff rozróżnia dowody pragmatyczne i intelektualne. Te pierwsze opierają się na rzeczywistym działaniu, które odbywa się na reprezentacjach obiektów matematycznych, podczas gdy drugie oparte są na doświadczeniach umysłowych i są realizowane za pomocą języka.

W szczególności Balacheff ilustruje:

- empiryzm naiwny (aby potwierdzić twierdzenie, sprawdzając kilka przykładów)
- kluczowe doświadczenie (potwierdzenie stwierdzenia poprzez sprawdzenie „kluczowego”, trudnego przykładu)
- przykład ogólny (aby sprawdzić poprawność stwierdzenia poprzez odniesienie do przykładu, który jest uważany za reprezentatywny dla całej kategorii)
- eksperyment mentalny (aby potwierdzić stwierdzenie nie odnoszące się do danego przykładu, a tym samym przejść do intelektualnych dowodów).

Narzędzie interwencyjne ma na celu poprowadzenie uczniów do konstrukcji dowodu. Ponadto narzędzia interwencji mają na celu wywołanie dyskusji na temat konieczności przejścia od dowodów pragmatycznych do intelektualnych.

3. Opis

3.1 Trudności zidentyfikowane za pomocą kwestionariusza B2

Narzędzie interwencyjne ma na celu rozwiązanie konkretnych trudności, które zostały zidentyfikowane za pomocą Kwestionariusza B1 i B2 (kwestionariusz B1: pytania 7-8-9-10-11; Kwestionariusz B2: Q2G1, Q2G2, Q2G3), dotyczy to trudności w radzeniu sobie z odczytywaniem własności figur.

Ponadto narzędzie interwencyjne ma na celu przygotowanie ucznia do dowodzenia twierdzeń. Jest ono przeznaczone dla „poziomu zaawansowanego”: zalecamy zajęcie się nim po przeanalizowaniu również narzędzi odnoszących się do domeny geometrycznej i wizualno-przestrzennej domeny poznawczej oraz narzędzia interwencyjnego na poziomie „średniozaawansowanym”.

3.2 Dziedzina poznawcza i dział matematyki

Narzędzie interwencyjne odnosi się do geometrii i poznawczej domeny rozumowania, chociaż istnieją istotne powiązania z poznawczymi domenami pamięci (przywoływanie z pamięci faktów i twierdzeń geometrycznych) i wzrokowo-przestrzennym (zajmowanie się figurą geometryczną, zarządzanie informacją w różnych reprezentacjach) w tym wizualno-przestrzenną).

3.3 Cele edukacyjne

Za pomocą narzędzia interwencyjnego uczniowie są przygotowani do skonstruowania dowodu, poprzez refleksję nad ważnymi krokami: rozumienie tekstu, zidentyfikowanie hipotezy i tezy, przedstawienie hipotez poprzez rysunek i za pomocą innych systemów reprezentacji (takich jak wzory algebraiczne), przywołanie już znanych faktów geometrycznych, organizowanie dowodu w postaci dedukcyjnego łańcucha argumentów.

Narzędzie składa się z serii pytań, które nauczyciel może zadać uczniom podczas dyskusji w klasie. Pytania mogą być wyświetlane na tablicy. Jeśli uczniowie mają do dyspozycji tablety lub komputery z połączeniem do internetu, pytania mogą być udzielane za pomocą interaktywnego systemu odpowiedzi (np. Socrative, Mentimeter).

W tym narzędziu interwencyjnym wprowadziliśmy w życie konkretne wytyczne UDL. Wytyczne w ramach Zasady 1 (zapewniają wiele sposobów reprezentacji) sugerują proponowanie różnych opcji percepcji i oferowanie wsparcia dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Narzędzie interwencyjne oferuje wskazówki i pomoc w dekodowaniu tekstu matematycznego. Zasada 2 i jej wytyczne (zapewnienie wielu środków działania i ekspresji) sugerują oferowanie różnych opcji



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

ekspresji i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Narzędzie interwencyjne przygotowuje ucznia do planowania strategii. Wytyczne dotyczące Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię minimalizując zagrożenia i czynniki rozpraszające. Uczniowie otrzymują pytania w formie ankiet (jaka jest prawidłowa odpowiedź?), aby zwiększyć ich aktywny udział w zajęciach.

W zakresie oceniania kształtującego uczniowie dbają o zadawane pytania w formie ankiet lub pytań otwartych (strategia 5: stają się odpowiedzialni za własną naukę); uczniowie proszeni są o skomentowanie błędnych odpowiedzi fikcyjnego ucznia (strategia 4: stają się zasobami dla innych); po sondażu nauczyciel może inicjować dyskusję (strategia 2); omawiając wyniki ankiety, nauczyciel pracuje indywidualnie lub w małych grupach, a po każdym punkcie lub na koniec ćwiczenia nauczyciel może inicjować dyskusję w klasie (strategia oceniania kształtującego 2). Uczniowie omawiają swoje strategie i trudności (strategie 4 i 5). Nauczyciel może monitorować postępy uczniów w trakcie gry, udzielając informacji zwrotnych i podpowiedzi (strategia 3).

3.4 Adresat: Uczeń/ Klasa

Narzędzie interwencyjne skierowane jest do całej klasy.

3.5 Działania edukacyjne: narzędzie interwencyjne

Narzędzie to składa się z serii pytań (w formie ankiet lub pytań otwartych), które nauczyciel może zadać uczniom podczas dyskusji w klasie. Pytania są już umieszczone w prezentacji PowerPoint, aby nauczyciel mógł je wyświetlić na tablicy.

Jeśli uczniowie mają do dyspozycji tablety lub komputery z podłączeniem do internetu, pytania mogą być udzielane za pomocą interaktywnego systemu odpowiedzi (np. Socrative, Mentimeter).

Plik programu PowerPoint znajduje się w osobnym załączniku. Tutaj wstawiamy kilka uwag dotyczących sekwencji pytań.

Uczniowie otrzymują zadanie do udowodnienia. Tekstowi towarzyszy rysunek. Przede wszystkim uczniowie muszą znaleźć tezę w tekście zadania. Nauczyciel może zainicjować dyskusję na temat odpowiedzi uczniów (strategia oceniania kształtującego 2).

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Znajdź tezę i podkreśl ją

Ten sam proces można zastosować dla hipotez w tekście.

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Znajdź i wypisz hipotezy.

Za pomocą kolejnego slajdu nauczyciel może zainicjować dyskusję mającą na celu zrozumienie, w jaki sposób zamienić tekst w rysunek.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Uczniowie powinni również być skłonni do refleksji, że nie wszystkie hipotezy można przedstawić na rysunku w skuteczny sposób.

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Rysując figurę, jakie są pierwsze hipotezy, które weźmiesz pod uwagę?

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

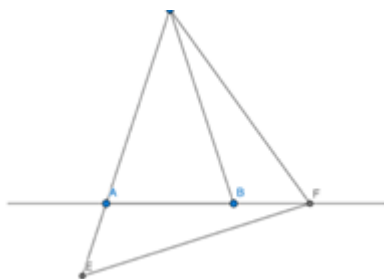
Rysując figurę, które hipotezy najtrudniej przedstawić na rysunku?

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Jak możesz przedstawić wszystkie hipotezy?

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Wskazówka: niektóre hipotezy przedstawiaj w formie równości, a nie za pomocą rysunku.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

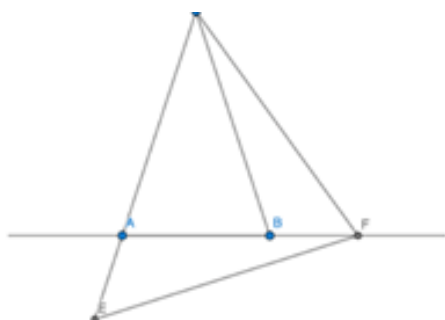
The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Wskazówka: niektóre hipotezy przedstawiaj w formie równości, a nie za pomocą rysunku.



$$AE = AC - AB$$

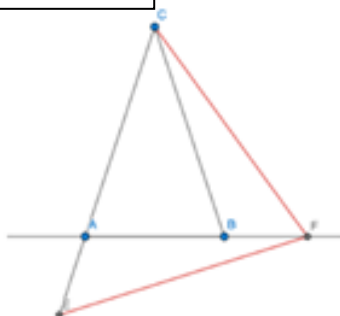
W kolejnej serii slajdów studenci proszeni są o refleksję dotyczącą tezy, aby ją udowodnić należy przypomnieć sobie cechę przystawania trójkątów bok, kąt, bok (bkb) i zastosować ją do odpowiednich trójkątów przedstawionych na rysunku. Oznacza to podjęcie zorientowanych na cel kroków pośrednich, pracy nad narysowaną figurą i równościami.

Nauczyciel może również zainicjować niektóre ankiety, poprosić uczniów o komentarz i ocenę odpowiedzi udzielonych przez fikcyjnych kolegów z klasy. W ten sposób uczniowie mają możliwość refleksji nad wagą przeprowadzenia dowodu jako dyskursu, w którym stwierdzenia muszą pochodzić z hipotez lub z wcześniejszej wiedzy (dowód intelektualny).

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Co przedstawiają odcinki zaznaczone kolorem czerwonym?

$$AE = AC - AB$$



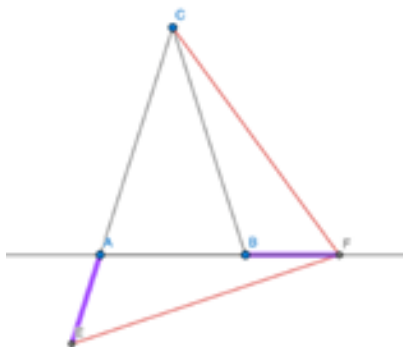
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Co przedstawiają odcinki zaznaczone kolorem fioletowym?

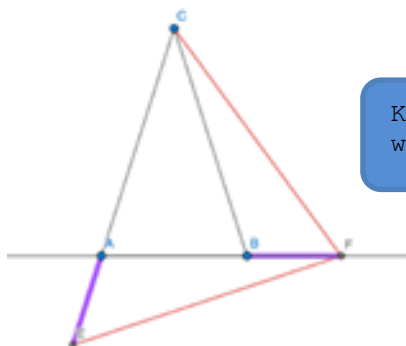
$$AE = AC - AB$$



Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Celem jest udowodnienie, że dwa czerwone odcinki są przystające. Możesz wziąć pod uwagę niektóre trójkąty, które zawierają czerwone odcinki i pokazać, że takie trójkąty są przystające.

$$AE = AC - AB$$



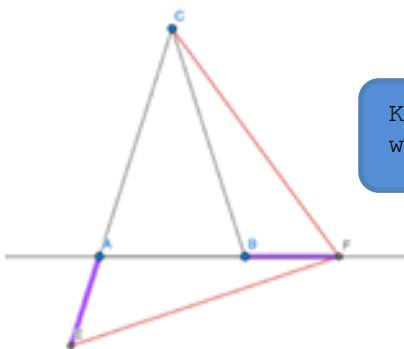
Które trójkąty byś wziął pod uwagę?

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Alicja:
trójkąty AEF
i BFC

Barbara:
trójkąty AFE
i AEF

$$AE = AC - AB$$

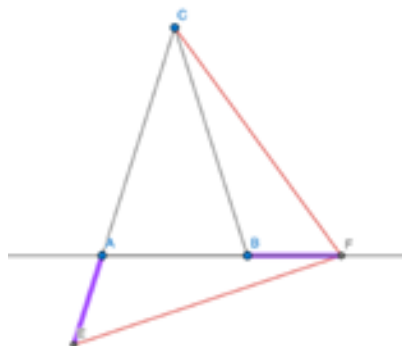


Które trójkąty ty byś
wziął pod uwagę?

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

$$AE = AC - AB$$

Celem jest
zastosowanie cechy
przystawania
trójkątów bkb.
Wiem już, że $AE =$
 BF . Muszę pokazać,
że odcinki AF i BC
są przystające i że
kąty FAE i CBF są
przystające.

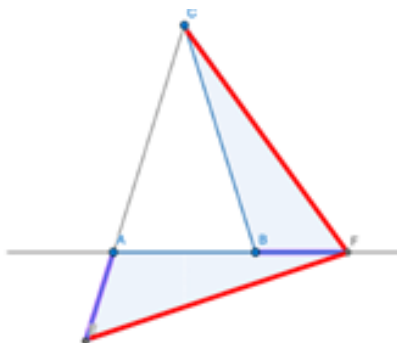


Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Rozważ zapisane równości. A co z odcinkiem AF?

Zauważ, że:
 $AE = AC - AB$

$AE = BF$

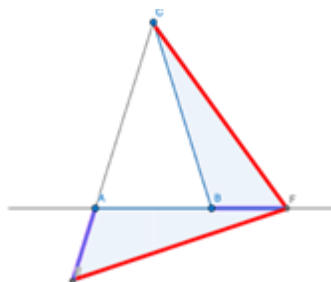


Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Ponieważ $AE = AC - AB$
 Otrzymujesz
 $AB = AC - AE$

Podstawiasz otrzymane wyrażenie AB do równania z AF

$$AF = AB + BF = AC - AE + BF = AC$$



Pamiętaj, że:
 $AE = AC - AB$

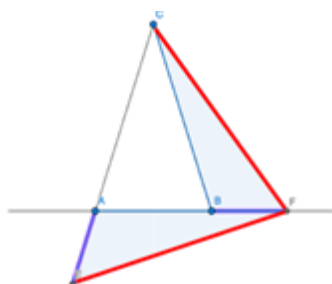
Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Ponieważ $AE=AC - AB$
Otrzymujesz
 $AB=AC - AE$

Podstawiasz otrzymane wyrażenie AB do równania z AF

$$AF = AB + BF = AC - AE + BF = AC$$

Co tu się stało?
Spójrz na podkreślone odcinki.



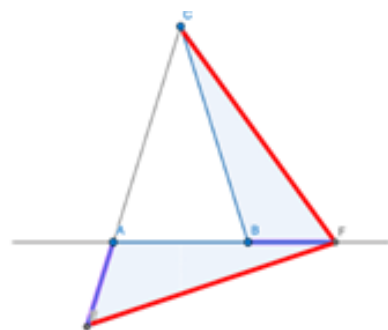
Pamiętaj,
że: $AE = AC - AB$

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Otrzymałeś: $AF = AC$

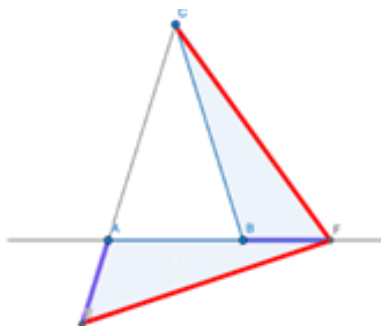
Których informacji możesz użyć, aby otrzymać równość $AF = BC$?

Pamiętaj,
że: $AE = AC - AB$



Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Otrzymałeś: $AF=AC$



Których informacji możesz użyć, aby uzyskać równość $AF = BC$?

Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny to
 $AC = BC$
 Więc

$$AF = AC = BC$$

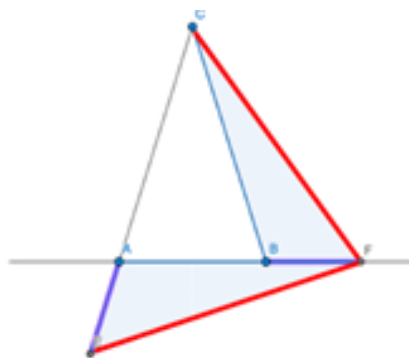
$$AF = BC$$

Pamiętaj,
 że:
 $AE = AC - AB$

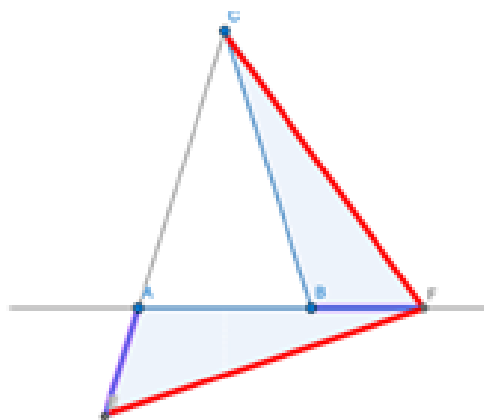
Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.

Wykazałeś, że odcinki $AF = BC$.
 Ponadto $AE = BF$.

Aby zastosować cechę przystawania trójkątów bkb, potrzebujesz również...



Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.



Dlaczego kąty zaznaczone na czerwono (FAE i CBF) są przystające?

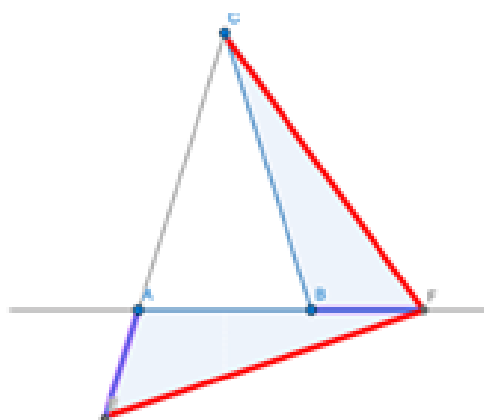
Alice: to wynika z hipotezy

Klara: ponieważ są kątami przyległymi do tego samego kąta

Barbara: z konstrukcji

Darla: ponieważ są one kątami przyległymi do kątów przystających

Narysuj trójkąt równoramienny ABC, tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE. Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE. Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF.



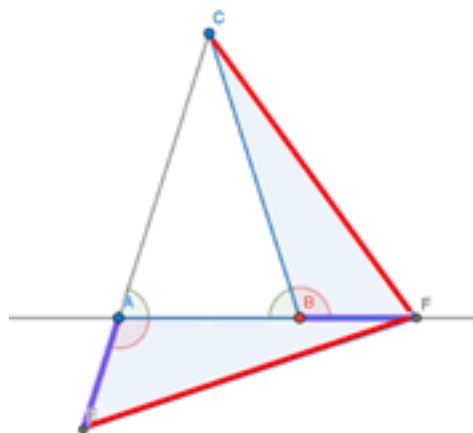
Darla: ponieważ są one kątami przyległymi do kątów przystających

Co to są kąty przystające?
Dlaczego są przystające?



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Narysuj trójkąt równoramienny ABC , tak aby długość podstawy AB była krótsza od długości ramienia. Przedłuż odcinek CA o długość odcinka AE . Długość AE jest równa różnicy długości ramienia i długości podstawy. Przedłuż podstawę AB o długość odcinka BF przystającego do AE . Wykaż, że odcinek CF jest przystający do odcinka EF .



Podsumowując:

$AF = BC$ ze względu na wyprowadzone równości wynikające z założeń oraz fakt, że trójkąt ABC jest równoramienny.

$AE = BF$ wynika z treści zadania, konstrukcji figury

Kąty FAE i CBF są przystające, ponieważ są one kątami przyległymi do kątów przystających

Zatem odcinki CF i EF są przystające

Zatem na mocy cechy przystawania trójkątów bkb , jasnoniebieskie trójkąty są przystające.

5. Bibliografia

- [1] Balacheff N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol.3, pp. 261-304.
- [2] Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141. <https://doi.org/10.1080/19404158.2017.1289963>
- [3] Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.
- [4] Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. *ZDM Mathematics Education*.
- [5] Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2018). Enhancing formative assessment in mathematical class discussion: a matter of feedback. *Proceedings of CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01949286, pp. 3460-3467.
- [6] Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- [7] Robotti E., Baccaglioni-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In *Innovation & Technology*. Series Mathematics Education in the Digital Era, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.