

FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

Construir o significado de variável e de uma expressão com uma variável

Universidade de Genova¹

1. Introdução

Para desenvolver atividades educativas voltadas para a construção do significado de variável e de expressão em função de tal variável, referimo-nos a alguns referenciais teóricos que serão descritos no ponto 2.

No ponto 3, o design das atividades educativas é descrito. Em particular, se as atividades são dirigidas a um aluno ou à turma, o objetivo educacional das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvidos e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2.

2. Enquadramento teórico de referência

Princípios do design universal para a aprendizagem (UDL)

Os Princípios da UDL (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (http://udlguidelines.cast.org/) estão organizadas na tabela seguinte.

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de ENVOLVIMENTO	Fornecer vários meios de REPRESENTAÇÃO	Fornecer vários meios de AÇÃO e EXPRESSÃO
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornece opções para o Interesse no envolvimento: Otimizar a escolha individual e a autonomia Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade Minimizar ameaças e distrações	Fornece opções para Percepção: Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações Oferecer alternativas para informações auditivas Oferecer alternativas para informações visuais	Fornece opções para Ações Físicas: • Variar o método de resposta e navegação • Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio

Emanuela De Negri, Elisabetta Robotti, Francesca Morselli, Paola Viterbori, Anna Siri, Laura Capelli



I	Toject Number: 2016-1-1102-KA201-046274				
Construção	Fornece opções para Esforço e Persistência: • Aumentar a relevância das metas e objetivos • Variar exigências e recursos para otimizar o desafio • Promover a colaboração e o espírito de equipa • Aumentar o feedback orientado para o professor	Fornece opções para Linguagens e Símbolos: • Esclarecer vocabulário e símbolos • Esclarecer a sintaxe e a estrutura • Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos • Promover a compreensão entre as diferentes linguagens • Ilustrar através de múltiplas representações	Fornece opções para Expressão e Comunicação: Usar vários meios para comunicação Usar várias ferramentas para construção e estruturação Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho		
Interiorização	Fornece opções para Autorregulação: Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações Desenvolver a autoavaliação e a reflexão	Fornece opções para Compreensão: Ativar ou fornecer conhecimento prévio Realçar padrões, características, grandes ideias e relações Guiar o processamento e a visualização de informações Maximizar a transmissão e generalização	Fornece opções para Funções Executivas: Orientar o estabelecimento de metas adequadas Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias Facilitar a gestão de informações e de recursos Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso		
Meta	Alunos que são				
Me	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados		

O Centro de Tecnologia Especial Aplicada (CAST) desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Design Universal para Aprendizagem (UDL), com o objetivo de focar na pesquisa, no desenvolvimento e na prática educacional e compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). O UDL inclui um conjunto de Princípios, articulados nas Diretrizes e Pontos de Verificação. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que "os alunos são altamente variáveis em sua resposta à instrução. [...] "

Assim, o UDL foca essas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e o projeto de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de compromisso. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos no recepção de certas informações e de "compreensão" das No entanto, as diretrizes do segundo princípio levam em informações recebidas. consideração a elaboração de informações / ideias e sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do "afeto" e da "motivação", também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para as nossas análises, vamo-nos concentrar em particular nas diretrizes específicas dos três Princípios.2.

Para caracterizar as dificuldades dos alunos em geometria, referimo-nos aos seguintes elementos do referencial de Karagiannakis e colegas (Tabela 1), que trataram da Memória na recuperação de fatos geométricos e processamento geométrico: recuperação de fatos geométricos, lembrando teoremas, lembrando hipóteses e teses que se estão a focar.

²3 **Estes** itens foram retirados lista interativa em http://www.udlcenter.org/research/researchevidence





Tabela 1: Quadro de Karagiannakis e colegas: domínios do modelo de quatro vertentes e conjuntos de habilidades matemáticas associadas a cada domínio

Domínio	Competências matemáticas associadas ao domínio
Números e Cálculo	Estimar com precisão um pequeno número de objetos (até 4), estimar aproximadamente quantidades; situar números na reta numérica; gerir símbolos arábicos; transcodificar um número de uma representação para outra (analógico-arábico-verbal), ter consciência dos princípios de contagem.
Memória (recuperação e processamento)	Relembrar fatos numéricos; descodificar a terminologia (numerador, denominador, isósceles, equilátero); recordar teoremas e fórmulas; realizar cálculos mentais com fluência; recordar dos procedimentos e acompanhar as etapas de resolução dos problemas.
Raciocínio	Compreender conceitos matemáticos, ideias e relações; Compreender etapas múltiplas em procedimentos / algoritmos complexos; compreensão dos princípios lógicos básicos (condicionalidade - "se então" - comutatividade, inversão); compreensão da estrutura semântica dos problemas; tomar decisões (estatégicas); generalização.
Visuo-Espacial	Interpretar e usar a organização espacial de representações de objetos matemáticos (por exemplo, números em notação decimal, expoentes, figuras 2D e 3D geométricas e rotações); situar números na reta numérica; confundir números arábicos e símbolos matemáticos; realização de cálculos escritos com prioridade das operações; interpretar gráficos e tabelas.

As atividades do FaSMEd são organizadas em sequências, que englobam trabalhos de grupo em fichas de trabalho e discussão em aula onde os trabalhos de grupo selecionados são discutidos por toda a turma, sob a orientação do professor. Levando em consideração as estratégias de avaliação formativa e as funcionalidades da tecnologia, Cusi, Morselli & Sabena (2017, p. 758) desenvolveram três tipos de fichas para a atividade em sala de aula:

- "(1) questionário de problemas: fichas de trabalho que apresentam um problema e fazem uma ou mais perguntas envolvendo a interpretação ou a construção da representação (verbal, simbólica, gráfica, tabular) da relação matemática entre duas variáveis (por exemplo, interpretando um gráfico de tempo-distância);
- (2) questionário de auxílio, destinadas a apoiar os alunos que enfrentam dificuldades com os formulários de problemas, fazendo sugestões específicas (por exemplo, questões norteadoras);
- (3) questionário de votação: fichas de trabalho solicitando uma votação entre as opções propostas".

Os autores identificaram estratégias de feedback (Tabela 5) que o professor pode adotar para dar feedback aos alunos (Cusi, Morselli & Sabena, 2018, p. 3466). Essas estratégias são usadas na discussão em aula que é organizada pelo professor após o trabalho em grupo nas fichas.

discussão em aula que é organizada pelo professor após o trabalho em grupo nas fichas.

Tabela 5:

frase. A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção		Quando o professor repete a intervenção de um aluno para chamar a atenção sobre a mesma. Frequentemente, durante a repetição, o professor enfatiza com a entoação de voz algumas palavras cruciais da frase. A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos.
---	--	--



Reformulação	A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos. A reformulação é aplicada quando o professor sente que a intervenção poderia ser útil, mas precisa ser comunicada de uma forma melhor para se tornar um recurso para os outros. [] As estratégias de repetição e reformulação [] fazem de um aluno (o autor da intervenção) um recurso para a aula.
Reformulação com apoio	Quando o professor, além de reformular, adiciona alguns elementos para orientar o trabalho dos alunos.
Recomeço	Quando o professor reage à intervenção de um aluno, que considera interessante para a turma, não dando um feedback direto, mas colocando uma questão relacionada. Desta forma, ao relançar o assunto, o professor fornece um feedback implícito [] sobre a intervenção do aluno, sugerindo que a questão é interessante e vale a pena ser aprofundada ou, inversamente, tem alguns pontos problemáticos e deve ser reformulada.
Destaque	O destaque ocorre quando o professor chama a atenção para duas ou mais intervenções, representando duas posições distintas, de modo a promover uma comparação. Em contraposição, [] os autores das duas posições podem ser recursos para a turma e também responsáveis pela sua aprendizagem.

A partir da experiência do FaSMEd, extraímos a ideia de criar atividades de sala de aula na perspetiva da avaliação formativa, que podem promover a inclusão..

3. Descrição

3.1 Dificuldades identificadas através do questionário B2

Detetámos dificuldades no seguintes itens de B2:

Se a=3 qual é o valor de 2a+1? Se x=-4, qual é o valor de 24/x?

Essas dificuldades estão relacionadas com a construção do significado de variável e de expressão em função dessa variável.

3.2 Área cognitiva e domínio matemático envolvidos

A área de dificuldades identificadas através do questionário B2 está relacionada com o domínio da Álgebra. Em particular, as dificuldades estão relacionadas com a construção do significado de variável e de expressão em função dessa variável. Assim, o Raciocínio é a área cognitiva envolvida (Tabela 1).

dificuldades Tabela1:As detetadas estão ligadas à área cognitiva do Raciocínio e no domínio da Álgebra

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória			
Raciocínio			Se a=3 qual é o valor de 2a+1? Se x= -4, qual é o valor de 24/x?
Visuo-espacial			

3.3 Objetivos Educativos





A ferramenta de intervenção visa apoiar a construção do significado de variável e de expressão numa variável.

3.4 Destinatários

A ferramenta de intervenção articula-se num conjunto de atividades que devem ser realizadas com toda a turma, numa perspetiva de inclusão.

3.5 Atividades educativas: a ferramenta de intervenção

As sequências de ensino são concebidas para abordar dificuldades específicas de aprendizagem, dentro de uma perspetiva inclusiva. As atividades não devem ser meros exercícios. Em vez disso, elas devem desempenham o papel de treino cognitivo. No treino cognitivo o aluno é levado a realizar uma série de exercícios que têm como foco o mesmo conteúdo matemático. Para ter uma sequência repetida, são usadas as TIC.

Representação dinâmica de variável e expressão dependendo dessa variável.

A ideia inicial nas atividades do projeto depende do uso do software AlNuSet, (consultar http://www.alnuset.com/en/alnuset). O AlNuSet foi projetado para alunos do ensino secundário (de 12 a 13 anos a 16 a 17 anos) e é composto por três ambientes distintos que são fortemente integrados: a Reta Algébrica, o Manipulador Algébrico e o Plano Cartesiano. Descreveremos as características da Reta Algébrica, através da atividade a seguir, que apoia a concepção de noções algébricas de variável e de expressão dependendo de uma variável em alunos de MLD (Robotti, E. 2016; Robotti E., Baccaglini-Frank A., 2017).

Na Reta Algébrica é possível colocar variáveis e expressões que dependem das mesmas. Para isso, o aluno deve digitar uma letra, por exemplo, "x", e um ponto móvel aparecerá na linha. O ponto pode variar dentro do conjunto de números escolhido (natural, inteiro, racional ou real) e a variação pode ser controlada diretamente pelo utilizador arrastando. Este recurso foi projetado para que aspectos importantes da noção de variável pudessem ser incorporados. Além disso, é possível construir expressões na linha que dependem de uma variável escolhida, por exemplo, 2x + 1. Não se pode agir diretamente sobre essa expressão dependente, mas esta se moverá como consequência quando x for arrastado. A expressão dependente assumirá as posições na linha que correspondem aos valores que assume quando a variável dependente assume o valor para o qual é arrastada (Figura 1).

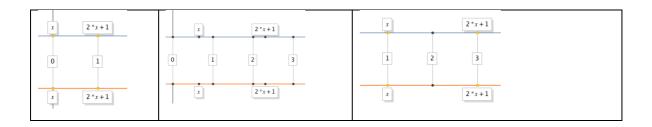


Figura 1. O movimento da variável x na reta algébrica reproduz o movimento da expressão dependente 2x + 1 na linha.

Referimos também que as funcionalidades descritas propõem diferentes representações (Princípio 1 da UDL) e são projetadas para promover ao utilizador uma mediação dos conceitos algébricos de expressão variável e dependente, através de um modelo dinâmico que pode ser acionado (Princípio 2 da UDL). A mediação pode ocorrer graças a canais visuais e cinestésicos, sem a necessidade de meios verbais visuais (linguagem escrita). A construção do conceito assim realizada pode permitir aos alunos, e principalmente aos alunos com MLD, encontrar referências mnemónicas adequadas ao seu estilo cognitivo. Isso permite começar a usar representações dos conceitos algébricos fundamentais em jogo e,



possivelmente, colocá-los e recuperá-los da memória de longo prazo de uma forma mais eficaz.

Com o apoio do AlNuSet, o professor pode promover uma discussão entre os alunos da turma de forma a conceptualizar a ideia de variável.

Na verdade, ele pode pedir aos alunos que movam x ao longo da linha e respondam às seguintes questões: "O que observa?", "Como interpreta o que acontece?"

Além disso, o professor pode promover também uma discussão entre os alunos a fim de conceptualizar a ideia de expressão em função da variável x.

Portanto, o professor pede aos alunos que digitem 2x + 1 no espaço do editor da Reta Algébrica e inicia uma discussão pela seguinte questão: "O que acontece na Reta Algébrica? "Como interpreta o que acontece com a expressão algébrica 2x + 1?".

Poderia ser interessante, inicialmente, promover a definição de uma hipótese sem o suporte dinâmico do AlNuSet.

Assim, o professor poderia perguntar aos alunos: "Se x = 3, qual acham que será o valor da expressão 2x + 1? Faça a sua hipótese, compare-a com a de seus colegas e depois verifique na Reta Algébrica do AlNuSet ".

Uma discussão (orientada pelo professor) sobre o que os alunos observam na Reta Algébrica e como podem interpretá-lo de forma algébrica, permite aos alunos construir o significado de variável e de expressão em função dessa variável.

Em termos de avaliação formativa, a estratégia 2 (discussões em sala de aula) é ativada. Durante a discussão, as estratégias 5 e 4 são acionadas, uma vez que os alunos podem intervir para expressar as suas dúvidas (tornando-se assim donos de sua própria aprendizagem) ou para dar explicações aos seus colegas (tornando-se recursos para eles). O professor e os colegas podem fornecer feedback a um aluno, ativando a estratégia 3.

Representação da relação entre variável e expressão dependendo dessa variável num plano cartesiano e numa tabela

Consideramos uma tabela que defina a relação entre a variável "x" e a expressão 2x + 1.

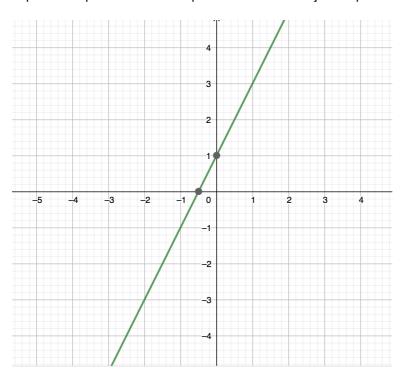
X	2x+1
1	
2	
3	
0	
-1	
-4	

O professor pede aos alunos que calculem o valor da expressão 2x + 1 a partir dos valores da variável independente "x"

X	2x+1
1	2*1+1=2+1=3
2	2*2+1=4+1=5
3	2*3+1=6+1=7
0	2*0+1=0+1=1
-1	2*(-1)+1=-2+1=-1
-4	2*(-4)+1=-8+1=-7



O professor pede aos alunos que desenhem a relação no plano cartesiano:

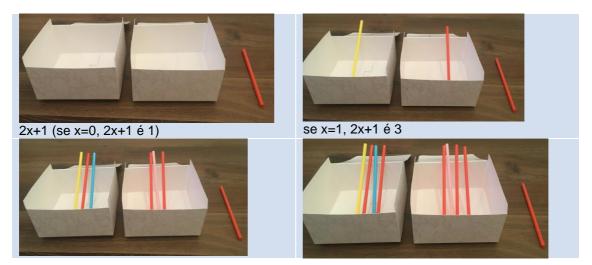


O professor orienta a discussão sobre a relação entre x e a expressão 2x + 1 tanto através da representação geométrica (no plano cartesiano) como da relação algébrica (na tabela) para que os alunos possam passar de uma representação a outra. (processo de transcodificação).

Representação concreta de uma variável e de uma expressão dependendo dessa variável

O professor apresenta duas caixas idênticas (cada uma representa x) e 1 palha (a constante), (Figura 2). Variando o número de palhas nas caixas (o mesmo para ambas, isto significa variar o valor da variável), o total de palhas varia (variando o valor da expressão em função de tal variável).

Figura 2: Variando o valor da expressão 2x + 1 variando o número de palhas nas caixas (x)





se x=3, 2x+1 é 7 se x=4, 2x+1 é 9

O significado de "variável" e de "expressão que depende dessa variável" em álgebra é construído de forma perceptiva pela manipulação de objetos concretos.

Discussão por meio das diretrizes UDL sobre as atividades mencionadas acima

Observamos que o objetivo educacional de construir o significado de "variável" e de "expressão dependendo dessa variável" em álgebra é abordado de maneiras diferentes, agindo sobre os três princípios da UDL (na Tabela 7, a vermelho, os nossos comentários para ilustrar a ligação entre os princípios e as nossas atividades).

Tabela 7: Análise das atividades através da tabela dos princípios da UDL.

Compromisso	Representação	Ação & Expressão
Recrutamento de interesse	Percepção	Ação física
Otimiza a escolha individual e a autonomia	Fornece maneiras de personalizar a exibição de informações	Vários métodos de resposta e navegação
Otimiza a relevância, o valor e a autenticidade Minimiza ameacas e	Oferece alternativas para ouvir informações	Otimize o acesso a ferramentas e tecnologias
Minimiza ameaças e distrações	Oferece alternativas para informações visuais	
	Diferentes registos através dos quais as informações são exibidas (visual; visual- dinâmico; simbólico)	
Sustentação do esforço, Persistência	Linguagem & Símbolos Esclarece o vocabulário e os símbolos	Expressão comunicação
Aumenta a relevância das metas e objetivos	Esclareça a sintaxe e a estrutura	Usa vários meios de comunicação
Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio	Oferecer linguagem e símbolos alternativos para descodificar informações e trabalhar com as informações Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos	Usa várias ferramentas para construção e composição
Promova a colaboração e a comunidade	Isso é promovido pela ação	Desenvolve fluências com níveis de suporte qualificados para prática e desempenho



Auto Regulação Promove expectativas e	Compreensão Ativa ou fornecer	Funções Executivas Orientar o estabelecimento de
		Algumas atividades que estão conectadas a este princípio são: - pedir para ler uma tabela usando AlNuSet (para transcodificar da tabela para AlNuSet) - pedir para ler AlNuSet com uma tabela (para transcodificar AlNuSet em uma tabela)
motivação no que diz respeito à elaboração da solução da tarefa	Isso é promovido pela visualização simultânea de diferentes registos ((por exemplo, na reta algébrica, uma variável é um ponto móvel na linha e é rotulado por x)	Além disso, nas atividades são fornecidos manipuladores matemáticos virtuais ou concretos. Por exemplo, arrastar um ponto móvel pode ajudar a visualizar que a variável pode ter valores diferentes na reta numérica.
Promove a colaboração e a comunidade Os feedbacks orientados apoiam o compromisso e a	Isso é promovido pelas atividades de transcodificação entre diferentes registos de representação Suporta decodificação de texto, notação matemática e símbolos	formais para falar sobre objetos matemáticos. Tais termos alternativos lembram o significado que foi construído pelos alunos. Por exemplo, os alunos que trabalharam com AlNuSet gostam de falar de "ponto móvel" quando se referem à variável.
Aumenta o feedback orientado para o domínio Varia as demandas e recursos para otimizar o desafio	objetos. Promove a compreensão em vários idiomas Ilustrar através de múltiplas medias	Usa diferentes registos para se comunicar Isso é promovido pelo uso de termos que são alternativos aos
	Promove a compreensão em	



Facilita as habilidades e estratégias pessoais reflexão

Desenvolve autoavaliação e reflexão

As estratégias de avaliação discutidas na seção 2, podem ajudar na autoavaliação e na especificamente, o professor pode fornecer diferentes tipos de feedback

Destaque padrões, recursos críticos, grandes ideias e relacionamentos (ponto de verificação 3.2)

Guia de processamento e visualização de informações

Maximize a transferência e generalização

Percepção, linguagem símbolos. compreensão (Construir conhecimento utilizável, conhecimento que é acessível para futuras tomadas de decisão, depende não meramente de perceber informações, mas "habilidades de processamento informações" ativas)

O uso de artefatos também pode ser um suporte para a memória. Os artefatos guiam o processo de investigação alunos, fornecendo feedback sobre o processo

Apoio ao planeamento e desenvolvimento de estratégia

Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso

Isto permite que os alunos construam significado para as noções algébricas abordadas.

4. Referências

- 1) Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31.
- 2) Cusi, A., Morselli, F.,& Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755-767. ZDM Mathematics Education.
- 3) Cusi, A., Morselli, F.,& Sabena, C. (2018). Enhancing formative assessment in mathematical class discussion: a matter of feedback. Proceedings of CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01949286, pp. 3460-3467.
- 4) Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115-141.
- 5) Robotti E., Baccaglini-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In Innovation & Technology. Series Mathematics Education in the Digital Era, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.
- Robotti E., (2016). Designing innovative learning activities to face up to difficulties in algebra of dyscalculia students: how exploit the functionality of AlNuSet. In Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks - Potential and pitfalls. A. Baccaglini-Frank, A. Leung (eds), Springer Publisher.

