



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

Compreensão do significado de potências de base 2 usando capacidades lógicas e manuais

1. Introdução

A fim de desenvolver um conjunto de atividades educacionais voltadas para as operações com potências e as suas propriedades, nomeadamente o produto de potências, fazemos referência a alguns referenciais teóricos que serão descritos na secção 2.

Na secção 3, é feita a descrição das atividades educacionais. Em particular, se as atividades são dirigidas a um único aluno ou à turma, o objetivo pedagógico das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvido e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2.

2. Enquadramento teórico

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as seguintes atividades são:

1) **Princípios do Universal Design for Learning (UDL)** (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas(<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de ENVOLVIMENTO	Fornecer vários meios de REPRESENTAÇÃO	Fornecer vários meios de AÇÃO e EXPRESSÃO
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o Interesse no envolvimento : <ul style="list-style-type: none">• Otimizar a escolha individual e a autonomia• Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade• Minimizar ameaças e distrações	Fornecer opções para Percepção : <ul style="list-style-type: none">• Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações• Oferecer alternativas para informações auditivas• Oferecer alternativas para informações visuais	Fornecer opções para Ações Físicas : <ul style="list-style-type: none">• Variar o método de resposta e navegação• Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Construção	<p>Fornece opções para Esforço e Persistência:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aumentar a relevância das metas e objetivos • Variar exigências e recursos para otimizar o desafio • Promover a colaboração e o espírito de equipa • Aumentar o feedback orientado para o professor 	<p>Fornece opções para Idiomas e Símbolos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Esclarecer vocabulário e símbolos • Esclarecer a sintaxe e a estrutura • Ajudar a decodificação de texto, notação matemática e símbolos • Promover a compreensão entre as diferentes linguagens • Ilustrar através de múltiplas representações 	<p>Fornece opções para Expressão e Comunicação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Usar vários meios para comunicação • Usar várias ferramentas para construção e estruturação • Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho
	<p>Fornece opções para Autorregulação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação • Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações • Desenvolver a autoavaliação e a reflexão 	<p>Fornece opções para Compreensão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ativar ou fornecer conhecimento prévio • Realçar padrões, características, grandes ideias e relações • Guiar o processamento e a visualização de informações • Maximizar a transmissão e generalização 	<p>Fornece opções para Funções Executivas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Orientar o estabelecimento de metas adequadas • Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias • Facilitar a gestão de informações e de recursos • Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso
Meta	Alunos que são		
	Determinados & Motivados	Perspícazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados

O Centro de Tecnologia Especial Aplicada (CAST) desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Design Universal para Aprendizagem (UDL), com o objetivo de focar na pesquisa, no desenvolvimento e na prática educacional e compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). O UDL inclui um conjunto de Princípios, articulados nas *Diretrizes e Pontos de Verificação*. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à aprendizagem¹. [...]” Assim, o UDL foca essas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e o projeto de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de envolvimento. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos na recepção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. No entanto, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações / ideias e sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para esta ferramenta será focado inicialmente na representação, incluindo as diretrizes de Percepção e Compreensão. As diretrizes sugerem e propõem diferentes opções de percepção e oferecem suporte para decodificar percepção e compreensão. Em particular, estas propõem a exibição da compreensão quanto às diretrizes que atentam para ativar ou fornecer conhecimentos básicos, destacando padrões, características críticas, grandes ideias e relacionamentos, e compreensão de visualização e generalização. Particularmente no que diz respeito à maximização da transferência e generalização: “Todos os alunos devem ser capazes de generalizar e transferir a sua aprendizagem para novos contextos. Os alunos



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

variam na quantidade de artefatos de suporte que necessitam para a memória e transferência, a fim de melhorar sua capacidade de acesso à sua aprendizagem anterior " Portanto, no que diz respeito à ação e expressão, esta ferramenta também inclui orientações nos "Métodos variados para resposta e navegação" e é adequada para o uso de objetos materiais.

Na secção 4, analisaremos exemplos de atividades, classificando-as tanto pelo tipo de aprendizagem matemática para que são projetadas como pela área cognitiva que apoiam. Mostraremos como esses exemplos foram elaborados com base nos princípios do UDL, de modo a torná-los inclusivos e eficazes para superar as dificuldades matemáticas identificadas pelo questionário B2.

2) Enquadramento teórico para aprender o raciocínio matemático

Discussões sobre este assunto podem ser encontrados em vários lugares, mas é sempre melhor referir-se à nossa cultura de base, mesmo em relação da metodologia, aplicando a tradição que nos vem da cultura grega.

"A aprendizagem da matemática, como a leitura e a escrita, é fruto de uma escolha cultural, que está na base da própria ideia de escola. É o desenvolvimento da inteligência através da abstração e do pensamento simbólico: a transição de um mundo de puras percepções, do 'senso comum' ao 'discurso racional', da imersão nas aparências e coisas concretas às entidades abstratas que nos permitem obter um determinado conhecimento. Esta finalidade da educação está delineada nas obras de Platão, que identifica na matemática os estudos que levam a este caminho. " ('Numbers' Ana Maria Millàn Gasca, pag. 105)

Sem dúvida, já com a ideia de Platão da matemática como 'paideia' (educação), podemos considerar e valorizar a importância das atividades de ensino.

Platão, no livro VII da República, atribui a matemática a um grande poder formativo: os números, como a geometria ('conhecimento do que sempre é'), obrigam a alma a usar a inteligência para alcançar a verdade: "Vocês já observaram como aqueles capacitados por natureza para os cálculos, estão prontos e afiados em quase todas as disciplinas; e que os últimos, se nesta disciplina forem educados, eles fazem um progresso e se exercitam, mesmo que não representem nenhuma outra vantagem, no entanto, eles ganham um cume e fazem progresso?"

Platão novamente:

"Que, para a vida familiar, para a vida pública e para todos os tipos de arte, nenhuma disciplina educacional tem uma eficácia tão grande quanto a ciência dos números; mas o mais importante é que ela desperta aqueles que por natureza estão sonolentos e com intelecto atrasado e os torna prontos para aprender, de boa memória e discernimento, fazendo-os progredir pela arte divina além de suas habilidades naturais "(livro V).

As atividades fundamentais estão relacionadas com a vida cotidiana familiar, turma e grupo, para desenvolver o raciocínio e intuição, para adquirir consciência e ordem mental e para construir habilidades racionais úteis para melhorar as habilidades nas propriedades das potências em relação a alunos com dificuldades de aprendizagem específicas.

As atividades fundamentais estão relacionadas com a vida diária, família, turma e grupo, para desenvolver o raciocínio e a intuição, para adquirir consciência e ordem mental e para construir capacidades racionais úteis para enfrentar problemas também em relação a sujeitos com dificuldades de aprendizagem específicas.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

3. Design

Encontramos algumas dificuldades no seguinte exercício de B2:

Q4AI1

$$a^2 \cdot a^3 = \dots\dots$$

$$(a^2)^3 = \dots\dots$$

3.1. Dificuldades identificadas através do questionário B2

A ferramenta de intervenção é apresentada em referência a uma dificuldade específica detetada pelo questionário B2. As regras das potências não são imediatas, existe sempre a necessidade de fazer uma conexão lógica com o significado da multiplicação. É necessário que o aluno tenha claro o conceito geral de número e operações.

3.2. Área cognitiva e domínio matemático de interesse

A área de dificuldade identificada no questionário B2 está relacionada com o domínio de álgebra e raciocínio (Tabela 1).

Tabela 1: As dificuldades detetadas estão relacionadas com raciocínio e domínio cognitivo da Álgebra

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória			
Raciocínio			Q4AI1
Visuo-espacial			

3.3. Objetivos educacionais

Esta ferramenta de intervenção permite melhorar o raciocínio em Álgebra a partir de exemplos muito simples que permitem aos alunos compreender as propriedades das operações com potências.

3.4. Destinatários

A ferramenta de intervenção pode ser dirigida à turma. O professor/a agrupa os alunos baseando-se nos diferentes níveis de competências e envolve-os no reconhecimento das propriedades das potências.

3.5. Atividades educacionais: a ferramenta de intervenção

Nesta secção, as atividades são descritas em detalhe.

Passos da intervenção:

1) O professor relembra aos alunos do significado da potência de um número e escreve a sua definição.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

A potência (ou expoente) de um número (ou de outro elemento) diz quantas vezes usar o número (ou elemento) numa multiplicação.

A potência é escrita como um pequeno número à direita e acima de um número, a base.

$$\begin{array}{llll}
 a^1 = a \text{ (1 vez)} \rightarrow & \blacksquare^1 = \blacksquare & \text{(Usar caixas como elemento da potência)} \\
 a^2 = a \cdot a & \text{(2 vezes)} & \rightarrow & \blacksquare^2 = \blacksquare \cdot \blacksquare \\
 a^3 = a \cdot a \cdot a & \text{(3 vezes)} & \rightarrow & \blacksquare^3 = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare \\
 a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a & \text{(4 vezes)} & \rightarrow & \blacksquare^4 = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare \\
 \dots & & &
 \end{array}$$

Para generalizar:

$a^n = a^n$ indica que temos de multiplicar **a** por ele mesmo, então há **n** desses **a's**:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (\text{n vezes}) \quad \rightarrow \quad \blacksquare^n = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \dots \cdot \blacksquare$$

Então, o expoente ajuda-nos a não escrever muitas multiplicações.

2) O/A professor/a mostra a aplicação da definição com um exemplo:

$$a^2 \cdot a^3 = \dots ? \text{ Como pode ser resolvido?}$$

Apenas aplique da seguinte forma:

$$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{(2+3)}$$

$\swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \nearrow$
 2vezes 3vezes = 5vezes

Fazer da mesma forma com a simbologia de caixa como base: $\blacksquare^2 \cdot \blacksquare^3 = (\blacksquare \cdot \blacksquare) \cdot (\blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare) = \blacksquare^5$

Fazer da mesma forma com um número como base" 2" ($a = 2$ or $\blacksquare = 2$): $(2^2) \cdot (2^3) = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 = 32$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \quad \downarrow \\
 (4) \cdot (8) = 32
 \end{array}$$

Finalmente aplicando as propriedades das potências: $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$; $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

3) Agora o/a professor/a propõe aos grupos de alunos que tentem resolver algumas potências com o mesmo método, por exemplo:

$$a^1 \cdot a^2 = \dots$$

$$\text{Etapas do aluno para resolver} = a \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a = a^3 = a^{(1+2)}$$

$$a^3 \cdot a^4 = \dots$$

$$\text{Etapas do aluno para resolver} = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7 = a^{(3+4)}$$

4) Nesta etapa o/a professor/a, discutindo em aula, descobre a lei geral relativa ao produto das potências com a mesma base:

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$$

$$\blacksquare^m \cdot \blacksquare^n = \blacksquare^{(m+n)}$$





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Com mais alguns exemplos, como na etapa 3, para que a compreensão da propriedade da potência seja adquirida.

5) Agora, o/a professor/a propõe outra pergunta aos alunos:

$$(a^2)^3 = \dots ? \quad \text{Como pode ser resolvido?}$$

O professor aplica a definição de potência, mas com uma sugestão:

$$a^2 = a \cdot a = \blacksquare$$

Por exemplo, se $\blacksquare = (\otimes \cdot \otimes)$ "em cada caixa existem 2 bolas"

$$\text{então, podemos colocar a questão da seguinte forma: } (a^2)^3 = (\blacksquare)^3$$

$$\text{Aplicando a definição de potência: } (a^2)^3 = (\blacksquare)^3 = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare$$

Fazendo a substituição:

$$(a^2)^3 = (\blacksquare)^3 = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare = (\otimes \cdot \otimes) \cdot (\otimes \cdot \otimes) \cdot (\otimes \cdot \otimes)$$

Quantas bolas encontramos?

$$\otimes \cdot \otimes \cdot \otimes \cdot \otimes \cdot \otimes \cdot \otimes = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$$



Então, podemos escrever da seguinte forma: $(a^2)^3 = a^{(2 \cdot 3)} = a^6$

6) Agora, o/a professor/a propõe usar esta regra com uma base específica, por exemplo base 2:

$$(2^2)^3 = 2^{(2 \cdot 3)} = 2^6 = 64$$

e o professor discute com a turma que esse exercício também pode ser resolvido por:

$$(2^2)^3 = (4)^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

7) Nesta etapa o professor propõe aos grupos de alunos que tentem resolver outros exemplos com o mesmo método:

$$(a^3)^4 = \dots \text{ e considerando que: } a^3 = (a \cdot a \cdot a) = \blacksquare \rightarrow \text{pode ser uma caixa}$$

e se essa caixa contém 3 bolas $\blacksquare = (\otimes \cdot \otimes \cdot \otimes)$ \rightarrow colocamos na caixa o número de bolas correspondente ao primeiro expoente

Aplicando a regra encontrada, utilizando a definição de potência cada grupo de alunos deve tentar resolver:

Passos de resolução:

$$(\blacksquare)^4 = \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare = (\otimes \cdot \otimes \cdot \otimes) \cdot (\otimes \cdot \otimes \cdot \otimes) \cdot (\otimes \cdot \otimes \cdot \otimes) \cdot (\otimes \cdot \otimes \cdot \otimes) = (12 \text{ bolas})$$





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

$$= (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{12} = a^{(3 \cdot 4)}$$

↓
(12 vezes)

8) O/A professor/a pede a cada grupo de alunos que use propriedades descobertas das potências, usando diferentes elementos ou números. Cada grupo deve escolher dois elementos diferentes e dois números diferentes para um total de quatro exemplos. Cada grupo mostrará um exemplo, aquele que considere mais representativo do que os outros.

9) Na última etapa, após esses exemplos e ampla discussão, a propriedade das potências pode ser formalizada pela seguinte lei:

$$(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$$

$$(\blacksquare^m)^n = \blacksquare^{(m \cdot n)}$$

4. Discussão através das diretrizes do UDL sobre as atividades anteriores

Observe que o mesmo propósito educacional de 'brincar' com números é abordado de maneiras diferentes, agindo de acordo com os três princípios da UDL (Tabela 7, a vermelho, comentários para ilustrar a ligação entre os princípios e nossas atividades).

Tabela 7: Análise das atividades através da Tabela de Princípios UDL.

Compromisso	Representação	Ação e expressão
Interesses de recrutamento	Percepção Fornece maneiras de personalizar a exibição de informações Oferece alternativas para ouvir informações Oferece alternativas para informações visuais Uso do símbolo da caixa e bolas para facilitar a descoberta das propriedades	Ação Física Vários métodos de resposta e navegação
Esforço de apoio e persistência	Linguagem & Símbolo Com representação gráfica	Expressão da comunicação Em grupo é mais fácil
Auto-regulação	Compreensão Ativa e fornece conhecimento básico Destacar padrões, recursos críticos, boas ideias e relacionamentos O uso manual de bolas para "tocar" na lei das potências As leis são apresentadas em exemplos específicos e de forma a serem generalizadas	Função executiva



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

5. Referências

- [1] Ana Maria Millàn Gasca (2016) 'Numbers and shapes', p.105 ed. Zanichelli
- [2] Plato (book V and VII of 'The Republic')
- [3] <https://www.inclusiva-mente.it/le-proprietà-delle-potenze/>
- [4] BARBARA URDANCH ["Didattica, supporto, autonomia. Matematica " ed il Capitello]
- [5] <https://www.mathsisfun.com/exponent.html>
- [6] https://mathinsight.org/exponentiation_basic_rules
- [7] <https://www.mathplanet.com/education/algebra-1/exponents-and-exponential-functions/properties-of-exponents>
- [8] <https://study.com/academy/lesson/what-are-the-five-main-exponent-properties.html>
- [9] <https://www.khanacademy.org/math/in-in-class-7th-math-cbse/x939d838e80cf9307:in-in-7th-powers-exponents/x939d838e80cf9307:in-in-7th-exponents-powers-exponents-properties-1/v/exponent-properties-1>
- [10] <https://www.khanacademy.org/math/in-in-class-7th-math-cbse/x939d838e80cf9307:in-in-7th-powers-exponents/x939d838e80cf9307:in-in-7th-exponents-powers-exponents-properties-1/v/exponent-properties-3>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.