



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

## FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

# Compreensão do significado do volume em sólidos melhorando as capacidades visuo-espaciais

### 1. Introdução

Com o objetivo de desenvolver um conjunto de atividades educacionais que visam compreender o significado do volume nos sólidos melhorando as capacidades visuo-espaciais, referimo-nos a alguns referenciais teóricos que serão descritos na secção 2.

Na secção 3, é feita a descrição das atividades educacionais. Em particular, se as atividades são dirigidas a um único aluno ou à turma, o objetivo pedagógico das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvido e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2

### 2. Enquadramento teórico de referência

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as atividades são:

1) **Princípios do Universal Design for Learning (UDL)** (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de <b>ENVOLVIMENTO</b>	Fornecer vários meios de <b>REPRESENTAÇÃO</b>	Fornecer vários meios de <b>AÇÃO e EXPRESSÃO</b>
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o <b>Interesse no envolvimento</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>Otimizar a escolha individual e a autonomia</li> <li>Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade</li> <li>Minimizar ameaças e distrações</li> </ul>	Fornecer opções para <b>Percepção</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações</li> <li>Oferecer alternativas para informações auditivas</li> <li>Oferecer alternativas para informações visuais</li> </ul>	Fornecer opções para <b>Ações Físicas</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>Variar o método de resposta e navegação</li> <li>Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio</li> </ul>
Construção	Fornecer opções para <b>Esforço e Persistência</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>Aumentar a relevância das metas e objetivos</li> <li>Variar exigências e recursos para otimizar o desafio</li> <li>Promover a colaboração e o espírito de equipa</li> <li>Aumentar o feedback orientado para o professor</li> </ul>	Fornecer opções para <b>Idiomas e Símbolos</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>Esclarecer vocabulário e símbolos</li> <li>Esclarecer a sintaxe e a estrutura</li> <li>Ajudar a decodificação de texto, notação matemática e símbolos</li> <li>Promover a compreensão entre as diferentes linguagens</li> <li>Ilustrar através de múltiplas representações</li> </ul>	Fornecer opções para <b>Expressão e Comunicação</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>Usar vários meios para comunicação</li> <li>Usar várias ferramentas para construção e estruturação</li> <li>Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho</li> </ul>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Interiorização	<p>Fornece opções para <b>Autorregulação:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação</li> <li>• Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações</li> <li>• Desenvolver a autoavaliação e a reflexão</li> </ul>	<p>Fornece opções para <b>Compreensão:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ativar ou fornecer conhecimento prévio</li> <li>• Realçar padrões, características, grandes ideias e relações</li> <li>• Guiar o processamento e a visualização de informações</li> <li>• Maximizar a transmissão e generalização</li> </ul>	<p>Fornece opções para <b>Funções Executivas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Orientar o estabelecimento de metas adequadas</li> <li>• Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias</li> <li>• Facilitar a gestão de informações e de recursos</li> <li>• Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso</li> </ul>	
	Alunos que são ....			
Meta	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados	

O “Center for Applied Special Technology (CAST)” desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Universal Design for Learning (UDL), com o objetivo de focar a pesquisa, o desenvolvimento e a prática educacional na compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). A UDL inclui um conjunto de princípios, articulados em Diretrizes e Pontos de verificação<sup>1</sup>. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à instrução. [...]”

Assim, a UDL foca-se nessas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e conceção de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de envolvimento. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos na receção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. Por sua vez, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações/ ideias e a sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para esta ferramenta o foco será na Representação incluindo as diretrizes Percepção e Compreensão. As diretrizes sugerem e propõem diferentes opções de percepção e oferecem suporte para a descodificação da percepção e compreensão. Em particular, eles se propõem a oferecer formas de personalizar a exibição de informações. No que diz respeito à compreensão, as diretrizes apontam para ativar ou fornecer conhecimentos básicos, realçar padrões, características, grandes ideias e relações, orientar o processamento e a visualização da informação e maximizar a transferência e generalização. Em particular em relação a maximizar a transferência e generalização: “Todos os alunos precisam ser capazes de generalizar e transferir a sua aprendizagem para novos contextos. Os alunos variam na quantidade de ferramentas de que precisam para memória e transferência, a fim de melhorar sua capacidade de aceder ao aprendido anteriormente”.

Então, em relação à Ação e Expressão esta ferramenta inclui também as orientações em “Variar os métodos de resposta e navegação”, e é adequada ao uso de itens artesanais.

Na secção 4, analisaremos exemplos de atividades, classificando-as tanto pelo tipo de aprendizagem matemática para que são projetadas como pela área cognitiva que apoiam. Mostraremos como esses exemplos foram elaborados com base nos princípios do UDL, a fim de torná-los inclusivos e eficazes para superar as dificuldades matemáticas identificadas pelo questionário B2.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

## 2) Referenciais Teóricos para a Aprendizagem do Raciocínio Geométrico

Do relatório da reunião do Grupo de Trabalho de Geometria no King's College, University of London, 28 de fevereiro de 1998 (<https://eprints.soton.ac.uk/41308/>): “Com o crescimento do interesse em ideias geométricas, é importante ser claro sobre a natureza do raciocínio geométrico e como ele se desenvolve. Este artigo fornece uma visão geral de três estruturas teóricas para a aprendizagem do raciocínio geométrico: o modelo de pensamento em geometria de van Hiele, a teoria dos conceitos figurais de Fischbein e o modelo cognitivo de raciocínio geométrico de Duval. Cada uma dessas estruturas fornece recursos teóricos para apoiar a pesquisa sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico em alunos e aspetos relacionados de visualização e construção. Esta visão geral conclui que ainda são necessárias muitas pesquisas sobre o profundo processo de desenvolvimento e a aprendizagem da visualização e do raciocínio”.

O modelo van Hiele de pensar em geometria fornece a seguinte descrição dos diferentes níveis, com base em suas traduções da obra de van Hiele do holandês original:

- Nível 0: o aluno identifica, nomeia, compara e opera sobre figuras geométricas;
- Nível 1: o aluno analisa figuras em termos de seus componentes e relações entre componentes e descobre propriedades / regras empiricamente;
- Nível 2: o aluno inter-relaciona logicamente propriedades / regras previamente descobertas, dando ou seguindo argumentos informais;
- Nível 3: o aluno prova teoremas dedutivamente e estabelece inter-relações entre redes de teoremas;
- Nível 4: o aluno estabelece teoremas em diferentes sistemas de postulação e analisa / compara esses sistemas.

Na teoria dos conceitos figurais, Fischbein (1993) observa que, embora uma figura geométrica como um quadrado possa ser descrita como tendo propriedades intrinsecamente conceituais (no sentido de que é controlada por uma teoria), não é apenas um conceito, é um imagem também. [...] Assim, Fischbein argumenta, todas as figuras geométricas representam construções mentais que possuem, simultaneamente, propriedades conceituais e figurais. [...] Ele argumenta que a geometria é um campo no qual é necessário que imagens e conceitos interajam, mas que na perspectiva do aluno pode haver uma tensão entre os dois.

Duval aborda a geometria de um ponto de vista cognitivo e perceptivo. Nesta estrutura, ele identifica quatro tipos do que chama de "apreensão cognitiva":

1. Apreensão perceptual: é o que se reconhece à primeira vista; talvez, por exemplo, subfiguras que não sejam necessariamente relevantes para a construção da figura geométrica.
2. Apreensão sequencial: é usada ao construir uma figura ou ao descrever sua construção. Nesse caso, as unidades figurais não dependem da percepção, mas de restrições matemáticas e técnicas (no último caso, isso poderia ser régua e compasso, ou talvez os primitivos em software de computador).
3. Apreensão discursiva: o reconhecimento perceptivo depende de afirmações discursivas porque as propriedades matemáticas representadas num desenho não podem ser determinadas apenas através da apreensão perceptual, algumas devem primeiro ser dadas através da fala.
4. Apreensão operativa: envolve operar a figura, seja mental ou fisicamente, o que pode dar uma visão sobre a solução de um problema.

Enquanto o acima se refere ao trabalho com desenhos geométricos, Duval (1998, p38-39) foi além ao propor que o raciocínio geométrico envolve três tipos de processos cognitivos que cumprem funções epistemológicas específicas. Esses processos cognitivos são:

- Processos de visualização, por exemplo, a representação visual de uma afirmação geométrica, ou a exploração heurística de uma situação geométrica complexa;
- Processos de construção (usando ferramentas);
- Processos de raciocínio - particularmente processos discursivos para extensão do conhecimento, para explicação, para prova.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

As conclusões do artigo são: “a visão geral acima de três estruturas razoavelmente bem desenvolvidas para descrever e compreender o desenvolvimento do raciocínio geométrico visa fornecer uma breve ideia dos recursos teóricos disponíveis que podem ser úteis na pesquisa nesta área. Ele também destaca a complexidade cognitiva da geometria.

Como conclui Duval: ainda são necessárias muitas pesquisas sobre o processo profundo do desenvolvimento e a aprendizagem da visualização e do raciocínio.

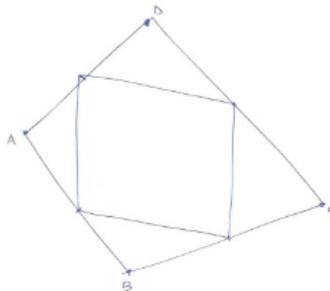
Com base nestas referências constroem-se algumas ferramentas muito fáceis em relação às capacidades visuo-espaciais em Geometria.

3) Habilidades visuoespaciais e geometria: Uma primeira proposta de um referencial teórico para interpretar processos de visualização

A introdução do artigo [2] é:

Propomos uma interpretação teórica das habilidades visuoespaciais, classificadas no campo da Psicologia Cognitiva, no domínio da Geometria Euclidiana. Nesta interpretação, fazemos uso da teoria dos conceitos figurais de Fischbein e das apreensões cognitivas de Duval. A nossa interpretação estabelece as bases para um novo quadro teórico que propomos como uma ferramenta para a análise qualitativa dos processos de visualização dos alunos enquanto realizam atividades geométricas. Em particular, apresentamos análises de trechos de um conjunto de atividades elaboradas e propostas numa intervenção didática voltada para o fortalecimento das habilidades visuoespaciais de um grupo de alunos identificados como os mais fracos de uma turma selecionada do 9º ano de um colégio italiano.

Os autores usam os conceitos de Fischbein e Duval propondo uma atividade para os alunos: Imagine um quadrilátero. Concentre-se no ponto médio de cada lado. Trace os segmentos que unem os pontos médios de lados consecutivos. O que me pode dizer sobre a figura que se forma?



Quando o aluno usa os dedos na mesa para desenhar melhor a imagem da figura, a interpretação dos alunos é que ele está usando a habilidade de manipulação de imagens, ajudando-se com uma imagem externa (o quadrilátero com vértices nas pontas dos quatro dedos) que ele pode agir. [...] Conforme ele move os seus dedos (formando o que parecem ser vários retângulos), ele está usando a previsão geométrica, possivelmente auxiliada por varredura visual, para visualizar o quadrilátero com vértices nos pontos médios dos lados do quadrilátero manipulado. [...] ele nunca os levanta da superfície, e então escolhe uma posição que seja coerente com a configuração que ele quer observar (mentalmente) e começa a mover os dedos novamente. O aluno parece ser capaz de manipular a figura de uma maneira que vai além do tipo de transformação descrita pela apreensão operativa. [...] O aluno parece estar procurando por suporte externo extra para suas habilidades de manipulação de imagens e previsão geométrica. Além disso, este trecho é muito interessante pelo que o aluno então decide desenhar na folha de papel quando convidado a fazê-lo. Embora ele tenha mencionado apenas o caso em que o quadrilátero é um quadrado e tenha percebido com os dedos vários casos de ele ser um retângulo, ele desenhou um quadrilátero convexo muito mais geral. Esse comportamento apoia a hipótese anterior de que o aluno



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

parece precisar de suporte externo para a sua manipulação de imagens e habilidades de previsão geométrica.

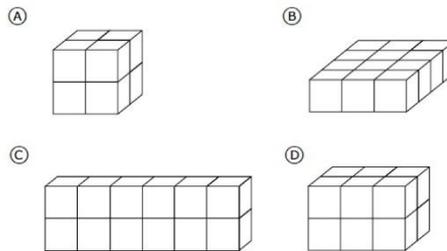
A partir dessas conclusões, propomos aqui uma atividade de sala de aula usando volumes feitos à mão de um simples lençol branco para promover e incentivar as habilidades visuo-espaciais.

### 3. Design

Detetámos dificuldades no seguinte item de B2

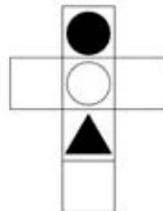
#### Q4G1.

Sabendo que nos sólidos abaixo todos os blocos pequenos têm o mesmo tamanho, indica qual dos sólidos tem volume diferente dos outros três.



#### Q4G2.

Qual dos cubos abaixo pode ser obtido se se dobrar a figura de cima?



Essas dificuldades estão relacionadas com a construção do significado de volume em sólidos e com imagens visuo-espaciais.

#### 3.1 Dificuldades identificadas através do questionário B2

A ferramenta de intervenção é apresentada para colmatar uma dificuldade específica que foi detetada através do questionário. O volume é uma medida de quanto uma figura pode conter e fornece informação sobre a capacidade de uma figura. A dificuldade de visualizar o mesmo volume de alguns sólidos construídos diferentes, mas com os mesmos sólidos quânticos, ou seja, o exercício do questionário Q4G1 - B2 demonstra necessidade de estudo mais aprofundado e a dificuldade de reconhecer um sólido construído a partir do exercício do questionário Q4G2 - B2 demonstra bastantes dificuldades na capacidade visuo-espacial.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

### 3.2 Área cognitiva e domínio matemático de interesse

A área de dificuldades identificada através do questionário B2 está relacionada com o domínio da Geometria e Visuo-Espacial é a área cognitiva envolvida (Tabela 1).

Tabela 1: As dificuldades detetadas estão relacionadas ao domínio cognitivo do Visuo-Espacial e no domínio da Geometria.

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória			
Raciocínio			
Visuo-espacial		Q4G1: Sabendo que nos sólidos abaixo todos os blocos pequenos têm o mesmo tamanho, indica qual dos sólidos tem volume diferente dos outros três. Q4G2: Qual dos cubos abaixo pode ser obtido se se dobrar a figura de cima?	

### 3.3 Objetivos Educacionais

Esta ferramenta de intervenção permite investigar e melhorar a área cognitiva Visuo-Espacial em Geometria a partir de algumas figuras muito simples que permitem compreender a geometria visuo-espacial e como essas diferentes figuras podem ajudar em outras mais complicadas.

### 3.4 Destinatários

A ferramenta de intervenção pode ser dirigida a toda a turma, procurando uma discussão positiva pelos alunos. É possível imaginar que muitos casos diferentes podem surgir da discussão e algum novo interesse pode ser desenvolvido nos alunos. Os alunos encontram Geometria durante todo o dia, na sala de aula, em casa, em todos os lugares, etc. Eles podem reconhecer todos os tipos de sólidos apenas caminhando e discutindo sobre aqueles na turma ou em casa desenvolvendo eles próprios algumas novas “ferramentas”.

### 3.5 Atividades educacionais: a ferramenta de intervenção

Neste parágrafo, as atividades da ferramenta são descritas em detalhe.

O professor começa por desenhar um sólido no quadro (um prisma retangular) e pede aos alunos que desenhem cada superfície do sólido ligada entre si, procurando respeitar a proporção e o prisma inicial.

Depois de uma discussão em aula, o professor desenha a superfície aberta de um prisma diferente, um prisma triangular, e então os alunos devem desenhar o sólido correspondente usando a sua folha e lápis.

Uma nova discussão em aula deve ajudar todos os alunos, em particular aqueles que tiveram dificuldades com o questionário B2. O professor vai orientar, perguntando o que eles fazem (para uma amostra da aula) e mostrando esses resultados, bons ou errados, focando a discussão para motivar a fazer melhor e entender a solução em todos os alunos.

Em seguida, dois alunos diferentes criarão dois novos exercícios, um começará de um sólido e o outro começará de uma superfície aberta. A segunda figura, depois de desenhada na folha, tem que ser criada em volume pelos alunos com cortadores e fita. Uma discussão na turma sobre o que eles criaram e quão difícil é, será aberta pelo professor.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Após estes exercícios o professor vai pedir novos exercícios aos alunos que tiveram problemas e eles podem começar a partir de uma superfície sólida ou aberta como quiserem.

#### 4. 4. Discussão através das orientações da UDL sobre as atividades mencionadas acima

Observamos que o mesmo objetivo educacional de construir o significado de “volume” em Geometria é abordado de diferentes maneiras, atuando sobre os três princípios da UDL (Tabela 7, em vermelho meus comentários para ilustrar a conexão entre os princípios e nossas atividades).

Tabela 7: Análise das atividades através da tabela dos princípios da UDL.

<b>Compromisso</b>	<b>Representação</b>	<b>Ação &amp; Expressão</b>
<b>Recrutamento de interesse</b>	<p><b>Percepção</b></p> <p>Fornecer maneiras de personalizar a exibição de informações</p> <p>Oferece alternativas para ouvir informações</p> <p>Oferece alternativas para informações visuais</p> <p>Muitos tipos sólidos com o mesmo volume são mostrados e construídos (visual-dinâmico; visual)</p>	<p><b>Ação física</b></p> <p>Vários métodos de resposta e navegação</p>
<b>Sustentação do esforço, Persistência</b>	<p><b>Linguagem &amp; Símbolos</b></p>	<p><b>Expressão comunicação</b></p>
<b>Auto Regulação</b>	<p><b>Compreensão</b></p> <p>Ativa ou fornecer conhecimento prévio</p> <p>Usando um volume simples, bem conhecido pelos alunos no início</p>	<p><b>Funções Executivas</b></p>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

	<p>Destaque padrões, recursos críticos, grandes ideias e relacionamentos</p> <p>O uso do quadro na primeira vez para criar condições para tentar a imagem das figuras.</p> <p>Em seguida, use os volumes feitos à mão.</p> <p>No final, use o quadro para verificar as habilidades visuo-espaciais.</p> <p>Guia de processamento e visualização de informações</p> <p>Maximize a transferência e generalização</p> <p>Os volumes criados são fáceis de generalizar para outras figuras mais complicadas ou em diferentes situações.</p>	
--	---	--

## 5. Referências

- [1] Jones, K. (1998), Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning, Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18(1&2), 29-34.
- [2] Elisa Miragliotta, Anna Baccaglini-Frank. Visuo-spatial abilities and geometry: A first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01950545
- [3] Baccaglini-Frank, Anna, "Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging" (2010). *Doctoral Dissertations*. 529.
- [4] Duval R. (1995) Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In: Sutherland R., Mason J. (eds) Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education. NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences), vol 138. Springer, Berlin, Heidelberg
- [5] Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.