



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

## FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

# Explorando soluções de equações e sistemas de equações

### 1. Introdução

A fim de desenvolver um conjunto de atividades educativas voltadas para a construção do significado de solução de uma equação ou de um sistema de equações, fazemos referência a alguns referenciais teóricos que serão descritos na seção 2.

Na seção 3, é feita a descrição das atividades educativas. Em particular, se as atividades são dirigidas a um único aluno ou à turma, o objetivo pedagógico das atividades, a área cognitiva e domínio matemático envolvido e os objetos matemáticos nas áreas de dificuldades identificadas através do questionário B2.

### 2. Quadro teórico de referência

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as atividades são:

**1) Princípios do Universal Design for Learning (UDL)** (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educacionais inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de <b>ENVOLVIMENTO</b>	Fornecer vários meios de <b>REPRESENTAÇÃO</b>	Fornecer vários meios de <b>AÇÃO e EXPRESSÃO</b>
	Redes afetivas O "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o <b>Interesse no envolvimento</b> : <ul style="list-style-type: none"><li>Otimizar a escolha individual e a autonomia</li><li>Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade</li><li>Minimizar ameaças e distrações</li></ul>	Fornecer opções para <b>Percepção</b> : <ul style="list-style-type: none"><li>Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações</li><li>Oferecer alternativas para informações auditivas</li><li>Oferecer alternativas para informações visuais</li></ul>	Fornecer opções para <b>Ações Físicas</b> : <ul style="list-style-type: none"><li>Variar o método de resposta e navegação</li><li>Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio</li></ul>
Construção	Fornecer opções para <b>Esforço e Persistência</b> : <ul style="list-style-type: none"><li>Aumentar a relevância das metas e objetivos</li><li>Variar exigências e recursos para otimizar o desafio</li><li>Promover a colaboração e o espírito de equipa</li><li>Aumentar o feedback orientado para o professor</li></ul>	Fornecer opções para <b>Linguagens e Símbolos</b> : <ul style="list-style-type: none"><li>Esclarecer vocabulário e símbolos</li><li>Esclarecer a sintaxe e a estrutura</li><li>Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos</li><li>Promover a compreensão entre as diferentes linguagens</li><li>Ilustrar através de múltiplas representações</li></ul>	Fornecer opções para <b>Expressão e Comunicação</b> : <ul style="list-style-type: none"><li>Usar vários meios para comunicação</li><li>Usar várias ferramentas para construção e estruturação</li><li>Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho</li></ul>





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Interiorização	<p>Fornecer opções para <b>Autorregulação:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação</li> <li>• Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações</li> <li>• Desenvolver a autoavaliação e a reflexão</li> </ul>	<p>Fornecer opções para <b>Compreensão:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ativar ou fornecer conhecimento prévio</li> <li>• Realçar padrões, características, grandes ideias e relações</li> <li>• Guiar o processamento e a visualização de informações</li> <li>• Maximizar a transmissão e generalização</li> </ul>	<p>Fornecer opções para <b>Funções Executivas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Orientar o estabelecimento de metas adequadas</li> <li>• Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias</li> <li>• Facilitar a gestão de informações e de recursos</li> <li>• Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso</li> </ul>
Meta	Alunos que são ....		
	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados

O “Center for Applied Special Technology (CAST)” desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Universal Design for Learning (UDL), com o objetivo de focar a pesquisa, o desenvolvimento e a prática educacional na compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). A UDL inclui um conjunto de princípios, articulados em Diretrizes e Pontos de verificação<sup>1</sup>. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à instrução. [...]”

Assim, a UDL foca-se nessas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e conceção de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de envolvimento. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de percepção envolvidos na receção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. Por sua vez, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações/ ideias e a sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para as nossas análises, vamos focar-nos em particular nas diretrizes específicas dos três princípios.

As diretrizes do Princípio 1 (fornecer vários meios de representação), sugerem propor diferentes opções de percepção e oferecer suporte para a descodificação de notações e símbolos matemáticos. Além disso, as diretrizes sugerem a importância de fornecer opções para padrões de destaque de compreensão, características, ideias-chave e relações entre noções matemáticas.

Além disso, as diretrizes do Princípio 2 (fornecer vários meios de ação e expressão) sugerem oferecer diferentes opções de expressão e comunicação para apoiar o planeamento e o desenvolvimento de estratégias. Finalmente, as diretrizes do Princípio 3 mostram como certas atividades podem atrair o interesse dos alunos, otimizando a escolha individual e a autonomia e minimizando ameaças e distrações.

<sup>1</sup> Para uma lista completa dos princípios, diretrizes e pontos de verificação e uma descrição mais extensa das atividades do CAST, visite <http://www.udlcenter.org>





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Na secção 4, analisaremos exemplos de atividades, classificando-as tanto pelo tipo de aprendizagem matemática para que são projetadas como pela área cognitiva que apoiam.

Mostraremos como esses exemplos foram desenhados sobre os princípios da UDL, a fim de os tornar inclusivos e eficazes para superar as dificuldades matemáticas identificadas por meio do questionário B2.

**2) O Projeto Europeu FasMed**, que incidiu sobre a avaliação formativa em matemática e ciências, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

A avaliação formativa (AF) é concebida como um método de ensino onde "as evidências sobre o desempenho do aluno são obtidas, interpretadas e usadas por professores, alunos ou colegas, para tomar decisões sobre as próximas etapas na instrução que, provavelmente, serão melhores, ou melhor fundamentadas, do que as decisões que teriam tomado na ausência das evidências que foram detetadas "(Black & Wiliam, 2009, p. 7). O projeto FaSMEd refere-se ao estudo de Wiliam e Thompson (2007), que identifica cinco estratégias-chave para as práticas de AF no ambiente escolar: (a) esclarecer e partilhar intenções de aprendizagem e critérios para o sucesso; (b) desenvolver discussões eficazes em sala de aula e outras tarefas de aprendizagem que evidenciem a compreensão do aluno; (c) fornecer feedback que ajude os alunos a progredir; (d) estimular os alunos como recursos de aprendizagem de uns para os outros; (e) estimular os alunos como donos de sua própria aprendizagem. O professor, os colegas do aluno e o próprio aluno são os agentes que ativam essas estratégias de AF.

Tabela 4: Estratégias de avaliação formativa

	Para onde o aluno se está a direcionar	Onde o aluno está agora	Como chegar lá
Professor	1. Esclarecer as intenções de aprendizagem e os critérios para o sucesso	2. Planear discussões eficazes em sala de aula e outras tarefas de aprendizagem que evidenciem a compreensão do aluno	3. Fornecer feedback que ajude os alunos a progredir
Colega	Compreender e partilhar intenções de aprendizagem e critérios para o sucesso	4. Estimular os alunos como recursos de aprendizagens de uns para os outros	
Aluno	Compreender as intenções de aprendizagem e os critérios para o sucesso	5. Estimular os alunos como donos da sua própria aprendizagem	

As atividades do FaSMEd são organizadas em sequências que englobam trabalhos de grupo em fichas de trabalho e discussão em aula, onde os trabalhos de grupo selecionados são discutidos por toda a turma, sob a orientação do professor. Tendo em consideração as estratégias de avaliação formativa e as funcionalidades da tecnologia, Cusi, Morselli & Sabena (2017, p. 758) desenvolveram três tipos de fichas para desenvolver em sala de aula:

"(1) *fichas de problemas*: fichas de trabalho que apresentam um problema e fazem uma ou mais perguntas envolvendo a interpretação ou a construção da representação (verbal, simbólica, gráfica, tabular) da relação matemática entre duas variáveis (por exemplo, interpretando um gráfico de tempo-distância );

(2) *fichas de auxílio*, destinadas a apoiar os alunos que enfrentam dificuldades nas fichas de problemas, fazendo sugestões específicas (por exemplo, questões norteadoras);

(3) *fichas de votação*, solicitando uma votação entre as opções propostas ".





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Os autores identificaram estratégias de feedback (Tabela 5) que o professor pode adotar para dar feedback aos alunos (Cusi, Morselli & Sabena, 2018, p. 3466). Essas estratégias são aplicadas na discussão em aula que é organizada pelo professor após o trabalho em grupo nas fichas.

Tabela 5:

Repetição	Quando o professor repete a intervenção de um aluno para chamar a atenção sobre a mesma. Frequentemente, durante a repetição, o professor enfatiza com a entoação de voz algumas palavras cruciais da frase. A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos.
Reformulação	A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos. A reformulação é aplicada quando o professor sente que a intervenção poderia ser útil, mas precisa ser comunicada de uma forma melhor para se tornar um recurso para os outros. [...] As estratégias de repetição e reformulação [...] fazem de um aluno (o autor da intervenção) um recurso para a aula.
Reformulação com apoio	Quando o professor, além de reformular, adiciona alguns elementos para orientar o trabalho dos alunos.
Recomeço	Quando o professor reage à intervenção de um aluno, que considera interessante para a turma, não dando um feedback direto, mas colocando uma questão relacionada. Desta forma, ao relançar o assunto, o professor fornece um feedback implícito [...] sobre a intervenção do aluno, sugerindo que a questão é interessante e vale a pena ser aprofundada ou, inversamente, tem alguns pontos problemáticos e deve ser reformulada.
Destaque	O destaque ocorre quando o professor chama a atenção para duas ou mais intervenções, representando duas posições distintas, de modo a promover uma comparação. Em contraposição, [...] os autores das duas posições podem ser recursos para a turma e também responsáveis pela sua aprendizagem.

A partir da experiência do FaSMEd, extraímos a ideia de criar atividades de sala de aula na perspectiva da avaliação formativa, que podem promover a inclusão.

### 3. Descrição

#### 3.1 Dificuldades identificadas através do questionário B2

Detetámos dificuldades nos itens seguintes do questionário B2:

Se  $a=3$  qual é o valor de  $2a+1$ ?

Se  $x= -4$ , qual é o valor de  $24/x$ ?

- a. 6
- b.  $1/6$
- c.  $-1/6$
- d. -6
- e. 20





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

Essas dificuldades estão relacionadas com a construção do significado de variável e de expressão numa variável, o que influenciará a construção do significado da equação.

### 3.2 Área cognitiva e domínio matemático envolvidos

A área de dificuldades identificada através do questionário B2 está relacionada com o domínio da Álgebra e do Raciocínio (Tabela 1).

Tabela 1: As dificuldades detetadas estão ligadas ao domínio cognitivo do Raciocínio e ao domínio da Álgebra

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória			
Raciocínio			Se $a=3$ qual é o valor de $2a+1$ ? Se $x=-4$ , qual é o valor de $24/x$ ? A. 6 B. $1/6$ C. $-1/6$ D. -6 E. 20
Visuo-espacial			

### 3.3 Objetivos educativos

A ferramenta de intervenção visa explorar soluções de equações e de sistemas de equações.

### 3.4 Destinatários

A ferramenta de intervenção é articulada num conjunto de atividades que devem ser realizadas com toda a turma, numa perspetiva de inclusão, e também no ensino on-line.

### 3.5 Atividades educativas: a Ferramenta de Intervenção

Vamos referir-nos à atividade em Desmos denominada "Equilibre as balanças" (<https://teacher.desmos.com>).

"Esta aula usa balanças para explorar soluções para equações e sistemas de equações. Os alunos exploram em primeiro lugar uma única balança e vêem que os valores que a equilibram também são soluções para uma equação e, quando unidos, formam uma reta. Em seguida, os alunos consideram duas balanças e vêem que os valores que as equilibram também são soluções das duas equações e localizam-se em ambas as retas. Usando esse contexto, os alunos distinguem sistemas de equações que têm uma solução, sem soluções e soluções infinitas".

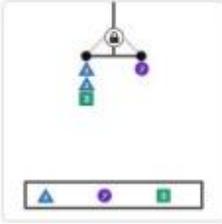
Está disponível um guia da atividade para o professor. Apresenta-se de seguida a sequência de atividades propostas para o aluno:





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

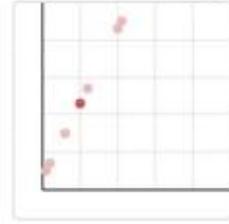
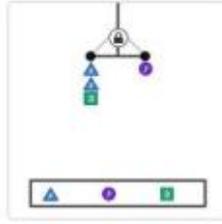
### 1 Warm-Up



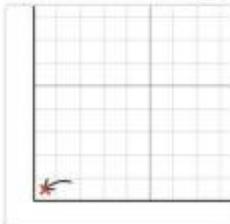
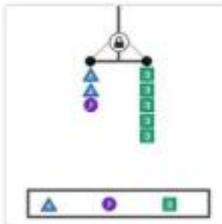
Find values for  $x$  and  $y$  so that the hanger



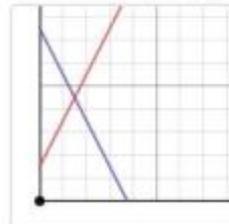
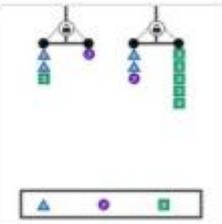
### 2 Notice and Wonder



### 3 Make It Balance



### 4 Challenge #1: Can yo...



### 5 System of Equations



The ordered pair is a solution to the system of



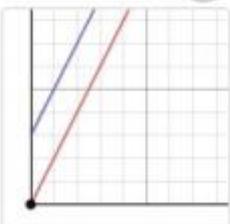
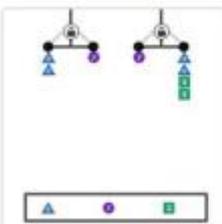
### 6 Find the Solution



The system of equations below represents the hangers:



### 7 Challenge #2: Can yo...



### 8 No Solutions



This system of equations from the previous screen has no





Project Number: 2018-1IT02KA201048274

**9 Challenge #3: Can yo...**

**10 Are You Ready for ...**

Find values for  $x$  and  $y$  so that both hangers

**11 Reflect**

Choose one of the representations and use it to

- 
- 
-

Observe que o professor pode interagir com cada aluno ou planejar uma discussão na turma para comparar, por exemplo, a solução de diferentes alunos.

### 3.6 Discussão através das diretrizes da UDL nas atividades acima mencionadas

Observamos que o mesmo objetivo educativo de construir o significado de variável e de equação e sistemas de equações em Álgebra é abordado de diferentes formas, seguindo os três princípios da UDL (Na Tabela 7, a vermelho, encontram-se os comentários que ilustram a ligação entre os princípios e as nossas atividades).

Tabela 7: Análise das atividades através da Tabela de Princípios da UDL

Envolvimento	Representação	Ação & Expressão
<p><b>Interesse no envolvimento</b></p> <p>Otimizar a escolha individual e a autonomia</p> <p>Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade</p> <p>Minimizar ameaças e distrações</p>	<p><b>Percepção</b></p> <p>Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações</p> <p>Oferecer alternativas para informações visuais</p> <p><i>Registos diferentes através dos quais as informações são exibidas (visual; simbólica)</i></p>	<p><b>Ações Físicas</b></p> <p>Variar o método de resposta e navegação</p>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

<p><b>Esforço e Persistência</b></p> <p>Aumentar a relevância das metas e objetivos</p> <p>Variar exigências e recursos para otimizar o desafio</p> <p>Promover a colaboração e o espírito de equipa</p> <p>Aumentar o feedback orientado para o professor</p>	<p><b>Linguagem e Símbolos</b></p> <p>Esclarecer vocabulário e símbolos</p> <p>Esclarecer a sintaxe e a estrutura</p> <p>Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos</p> <p><i>Isto é conseguido pela ação dinâmica e pela manipulação de objetos</i></p> <p>Promover a compreensão entre as diferentes linguagens</p> <p>Oferecer linguagem alternativa e símbolos para descodificar informações e trabalhar nas informações</p>	<p><b>Expressão e Comunicação</b></p> <p>Usar várias ferramentas para construção e estruturação</p> <p>Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho</p> <p>Usar registos diferentes com o objetivo de comunicar</p> <p><i>Isto é conseguido através do uso de termos e símbolos alternativos aos formais para falar de objetos matemáticos, Além disso, nas atividades são fornecidos materiais manipuláveis virtuais ou concretos. Por exemplo, arrastar um ponto pode ajudar a visualizar que a variável pode ter valores diferentes na reta numérica.</i></p>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1IT02KA201048274

<b>Autorregulação</b>	<b>Compreensão</b>	<b>Funções Executivas</b>
<p>Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação</p> <p>Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações</p> <p>Desenvolver a autoavaliação e a reflexão</p> <p><i>As estratégias de avaliação formativa, conforme discutido na secção 2, podem auxiliar na autoavaliação e reflexão. Mais especificamente, o professor pode fornecer diferentes tipos de feedback</i></p>	<p>Ativar ou fornecer conhecimento prévio</p> <p>Realçar padrões, características, ideias e relações</p> <p>Guiar o processamento e a visualização de informações</p> <p>Maximizar a transmissão e generalização</p> <p>Perceção, linguagem e símbolos, compreensão (Construção de conhecimentos aplicáveis, conhecimento acessível para futuras tomadas de decisão, depende não de meramente perceber informações, mas de "capacidade ativas de processamento de informações")</p>	<p><i>Orientar o estabelecimento de metas adequadas</i></p> <p><i>A utilização de objetos pode ser um apoio à memória, na medida em que ajuda o aluno no processo de investigação dando-lhe feedback</i></p> <p><i>Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias</i></p> <p><i>Facilitar a gestão de informações e de recursos</i></p> <p><i>Aumentar a capacidade de monitorizar os progressos</i></p>

## 5. Referências bibliográficas

[1]<https://www.desmos.com/?lang=it>

[2]Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115–141.

[3]UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.