



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

FERRAMENTA DE INTERVENÇÃO

Memorização de factos geométricos

1. Introdução

Nesta ferramenta de intervenção propomos atividades educativas orientadas para o apoio à memorização de factos geométricos. A intervenção está enquadrada nos quadros teóricos descritos na secção 2, enquanto na secção 3 é feita a descrição das atividades educativas.

2. Quadro teórico de referência

As referências teóricas que nos ajudaram a delinear as atividades são:

1) Princípios do Universal Design for Learning (UDL) (Tabela 3), uma estrutura concebida especificamente para projetar atividades educativas inclusivas (<http://udlguidelines.cast.org/>)

Tabela 3: Orientações da UDL

	Fornecer vários meios de ENVOLVIMENTO	Fornecer vários meios de REPRESENTAÇÃO	Fornecer vários meios de AÇÃO e EXPRESSÃO
	Redes afetivas o "PORQUÊ" da aprendizagem	Redes de reconhecimento O "O QUÊ" da aprendizagem	Redes estratégicas O "COMO" da aprendizagem
Adesão	Fornecer opções para o Interesse no envolvimento : <ul style="list-style-type: none">• Otimizar a escolha individual e a autonomia• Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade• Minimizar ameaças e distrações	Fornecer opções para Percepção : <ul style="list-style-type: none">• Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações• Oferecer alternativas para informações auditivas• Oferecer alternativas para informações visuais	Fornecer opções para Ações Físicas : <ul style="list-style-type: none">• Variar o método de resposta e navegação• Otimizar o acesso a ferramentas e tecnologias de apoio
Construção	Fornecer opções para Esforço e Persistência : <ul style="list-style-type: none">• Aumentar a relevância das metas e objetivos• Variar exigências e recursos para otimizar o desafio• Promover a colaboração e o espírito de equipa• Aumentar o feedback orientado para o professor	Fornecer opções para Linguagens e Símbolos : <ul style="list-style-type: none">• Esclarecer vocabulário e símbolos• Esclarecer a sintaxe e a estrutura• Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos• Promover a compreensão entre as diferentes linguagens• Ilustrar através de múltiplas representações	Fornecer opções para Expressão e Comunicação : <ul style="list-style-type: none">• Usar vários meios para comunicação• Usar várias ferramentas para construção e estruturação• Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Meta	Alunos que são		
	Determinados & Motivados	Perspicazes & Conhecedores	Estratégicos e Focados

Interiorização	<p>Fornece opções para Autorregulação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação • Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações • Desenvolver a autoavaliação e a reflexão 	<p>Fornece opções para Compreensão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ativar ou fornecer conhecimento prévio • Realçar padrões, características, grandes ideias e relações • Guiar o processamento e a visualização de informações • Maximizar a transmissão e generalização 	<p>Fornece opções para Funções Executivas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Orientar o estabelecimento de metas adequadas • Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias • Facilitar a gestão de informações e de recursos • Aumentar a capacidade de monitorizar o progresso
----------------	---	--	---

O “Center for Applied Special Technology (CAST)” desenvolveu uma estrutura abrangente em torno do conceito de Universal Design for Learning (UDL), com o objetivo de focar a pesquisa, o desenvolvimento e a prática educativa na compreensão da diversidade e na facilitação da aprendizagem (Edyburn, 2005). A UDL inclui um conjunto de princípios, articulados em Diretrizes e Pontos de verificação¹. A pesquisa que fundamenta a estrutura da UDL é que “os alunos são altamente variáveis na sua resposta à instrução. [...]”

Assim, a UDL foca-se nessas diferenças individuais como um elemento importante para a compreensão e conceção de uma instrução eficaz para a aprendizagem.

Para atingir este objetivo, a UDL apresenta três princípios fundamentais: 1) fornecer vários meios de representação, 2) fornecer vários meios de ação e expressão, 3) fornecer vários meios de envolvimento. Em particular, as diretrizes do primeiro princípio têm a ver com os meios de perceção envolvidos na receção de certas informações e de “compreensão” das informações recebidas. Por sua vez, as diretrizes do segundo princípio levam em consideração a elaboração de informações/ ideias e a sua expressão. Por fim, as diretrizes do terceiro princípio tratam do domínio do “afeto” e da “motivação”, também essenciais em qualquer atividade educacional.

Para as nossas análises, vamos focar-nos em particular nas diretrizes específicas dos três princípios.

As diretrizes do Princípio 1 (fornecer vários meios de representação), sugerem propor diferentes opções de perceção e oferecer suporte para a descodificação de notações e símbolos matemáticos. Além disso, as diretrizes sugerem a importância de fornecer opções para padrões de destaque de compreensão, características, ideias-chave e relações entre noções matemáticas.

Além disso, as diretrizes do Princípio 2 (fornecer vários meios de ação e expressão) sugerem oferecer diferentes opções de expressão e comunicação para apoiar o planeamento e o desenvolvimento de estratégias. Finalmente, as diretrizes do Princípio 3 mostram como certas atividades podem atrair o interesse dos alunos, otimizando a escolha individual e a autonomia e minimizando ameaças e distrações.

Para caracterizar as dificuldades dos alunos em geometria, referimo-nos aos seguintes elementos da tabela de Karagiannakis e colegas (Tabela 1), que tratam da Memória na recuperação de factos geométricos e processamento geométrico: recuperação de fatos geométricos, memória de teoremas, hipóteses e teses.

¹ Para uma lista completa dos princípios, diretrizes e pontos de verificação e uma descrição mais extensa das atividades do CAST, visite <http://www.udlcenter.org>





Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Tabela 1: Tabela de Karagiannakis e colegas: domínios do modelo de quatro vertentes e conjuntos de competências matemáticas associadas a cada domínio

Domínio	Competências matemáticas associadas ao domínio
Números e Cálculo	Estimar com precisão um pequeno número de objetos (até 4), estimar quantidades aproximadas; localizar números na reta numérica; trabalhar com símbolos arábicos; converter um número de uma representação para outra (analógico-arábico-verbal), usar princípios de contagem.
Memória (recuperação e processamento)	Relembrar factos numéricos; descodificar terminologia (numerador, denominador, isósceles, equilátero); recordar teoremas e fórmulas; realizar cálculos mentais com fluência; recordar procedimentos e acompanhar as etapas necessárias à resolução de problemas.
Raciocínio	Compreender conceitos matemáticos, ideias e relações; compreender etapas múltiplas em procedimentos / algoritmos complexos; compreender os princípios lógicos básicos (condicionalidade - "se ... então" - comutatividade, inversão); compreender a estrutura semântica dos problemas; tomar decisões (estratégicas); fazer generalizações.
Visuo-Espacial	Interpretar e usar a organização espacial de representações de objetos matemáticos (por exemplo, números em notação decimal, expoentes, figuras 2D e 3D geométricas e rotações); representar números na reta numérica; distinguir números arábicos e símbolos matemáticos; realizar cálculos respeitando a prioridade das operações; interpretar gráficos e tabelas.

Como esta ferramenta de intervenção diz respeito à atividade geométrica, também consideramos a teoria de Duval sobre diferentes apreensões cognitivas de figuras, como a forma de ver, construir e descrever uma figura geométrica e as suas propriedades. O modelo Duval é de particular interesse, pois preocupa-se em compreender o desenvolvimento de processos cognitivos como revelado ao resolver problemas de geometria (Duval, 1998). Duval (1995) sugere uma teoria analítica para analisar processos de pensamento envolvidos numa atividade geométrica. Na verdade, no modelo cognitivo de raciocínio geométrico de Duval, a figura desempenha um papel fundamental:

- Uma figura dá-nos uma representação de uma situação geométrica mais rápida e mais fácil de ser entendida do que uma representação com um enunciado.
- Existem diferentes apreensões cognitivas de figuras através das quais ver, construir e descrever uma figura geométrica e suas propriedades:
 1. Apreensão perceptiva
 2. Apreensão sequencial
 3. Apreensão discursiva
 4. Apreensão operativa



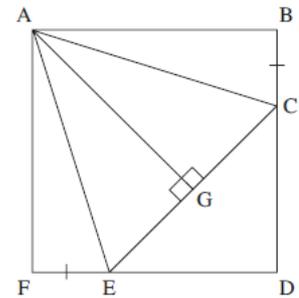
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

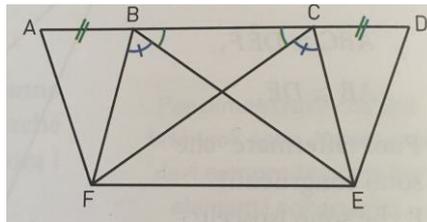


Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

1. **Apreensão perceptiva:** Trata-se de reconhecimento físico (forma, representação, tamanho, brilho, etc.) de uma figura. Devemos também discriminar e reconhecer sub-figuras, uma vez que uma discriminação ou reconhecimento relevante dessas sub-figuras pode ajudar e dar pistas para a resolução de problemas em situações geométricas.

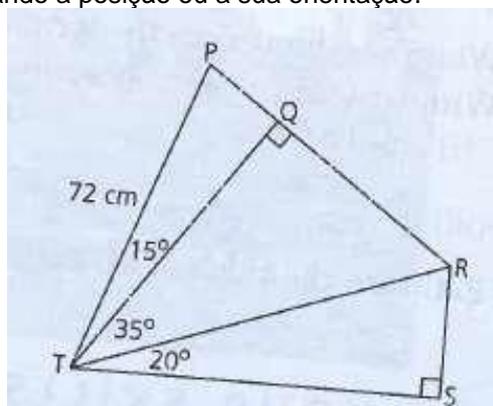


Ou na figura seguinte:



Por exemplo, as sub-figuras FBE e FCE que estão sobrepostas.

2. **Apreensão sequencial:** Trata-se da construção de uma figura ou a descrição da sua construção. Tal construção depende de condições dadas e também de propriedades matemáticas, uma vez que a construção de uma figura pode envolver diferentes sub-figuras. Acredita-se que a construção pode ajudar no reconhecimento das relações entre propriedades matemáticas e das condições.
3. **Apreensão discursiva:** Trata-se de (a) a capacidade de ligar configurações(s) com princípios geométricos, (b) a capacidade de fornecer boa descrição, explicação, argumentação, dedução, uso de símbolos, raciocínio dependendo de declarações feitas sobre apreensão perceptiva, e (c) a capacidade de descrever figuras através de linguagem geométrica/textos narrativos
4. **Apreensão operacional:** Trata-se de fazer modificações de uma determinada figura de várias maneiras para investigar outras configurações dessa figura:
 - A forma metrológica: dividindo toda a figura em partes de várias formas e combinando essas partes noutra figura ou sub-figuras;
 - A forma ótica: variando o tamanho das figuras; pode fazer uma forma maior ou mais estreita, ou com diferente inclinação, isto é as formas podem aparecer de forma diferente;
 - A posição: variando a posição ou a sua orientação.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Na secção 4, analisaremos exemplos de atividades, classificando-as tanto pelo tipo de aprendizagem matemática para que são projetadas como pela área cognitiva que apoiam.

Por fim, referimo-nos ao Projeto Europeu **FasMed**, que incidiu sobre a avaliação formativa em matemática e ciências, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

A avaliação formativa (AF) é concebida como um método de ensino onde "as evidências sobre o desempenho do aluno são obtidas, interpretadas e usadas por professores, alunos ou colegas, para tomar decisões sobre as próximas etapas na instrução que, provavelmente, serão melhores, ou melhor fundamentadas, do que as decisões que teriam tomado na ausência das evidências que foram detetadas" (Black & William, 2009, p. 7). O projeto FaSMEd refere-se ao estudo de William e Thompson (2007), que identifica cinco estratégias-chave para as práticas de AF no ambiente escolar: (a) esclarecer e partilhar intenções de aprendizagem e critérios para o sucesso; (b) desenvolver discussões eficazes em sala de aula e outras tarefas de aprendizagem que evidenciem a compreensão do aluno; (c) fornecer feedback que ajude os alunos a progredir; (d) estimular os alunos como recursos de aprendizagem de uns para os outros; (e) estimular os alunos como donos de sua própria aprendizagem. O professor, os colegas do aluno e o próprio aluno são os agentes que ativam essas estratégias de AF.

Tabela 4: Estratégias de avaliação formativa

	Para onde o aluno se está a direcionar	Onde o aluno está agora	Como chegar lá
Professor	1. Esclarecer as intenções de aprendizagem e os critérios para o sucesso	2. Planear discussões eficazes em sala de aula e outras tarefas de aprendizagem que evidenciem a compreensão do aluno	3. Fornecer feedback que ajude os alunos a progredir
Colega	Compreender e partilhar intenções de aprendizagem e critérios para o sucesso	4. Estimular os alunos como recursos de aprendizagens de uns para os outros	
Aluno	Compreender as intenções de aprendizagem e os critérios para o sucesso	5. Estimular os alunos como donos da sua própria aprendizagem	

As atividades do FaSMEd são organizadas em sequências que englobam trabalhos de grupo em fichas de trabalho e discussão em aula, onde os trabalhos de grupo selecionados são discutidos por toda a turma, sob a orientação do professor. Tendo em consideração as estratégias de avaliação formativa e as funcionalidades da tecnologia, Cusi, Morselli & Sabena (2017, p. 758) desenvolveram três tipos de fichas para desenvolver em sala de aula:

"(1) *fichas de problemas*: fichas de trabalho que apresentam um problema e fazem uma ou mais perguntas envolvendo a interpretação ou a construção da representação (verbal, simbólica, gráfica, tabular) da relação matemática entre duas variáveis (por exemplo, interpretando um gráfico de tempo-distância);

(2) *fichas de auxílio*, destinadas a apoiar os alunos que enfrentam dificuldades nas fichas de problemas, fazendo sugestões específicas (por exemplo, questões norteadoras);

(3) *fichas de votação*, solicitando uma votação entre as opções propostas".

Os autores identificaram estratégias de feedback (Tabela 5) que o professor pode adotar para dar feedback aos alunos (Cusi, Morselli & Sabena, 2018, p. 3466). Essas estratégias são aplicadas na discussão em aula que é organizada pelo professor após o trabalho em grupo nas fichas.



Tabela 5:

Repetição	Quando o professor repete a intervenção de um aluno para chamar a atenção sobre a mesma. Frequentemente, durante a repetição, o professor enfatiza com a entoação de voz algumas palavras cruciais da frase. A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos.
Reformulação	A reformulação ocorre quando o professor reformula a intervenção de um aluno, com o duplo objetivo de chamar a atenção da turma e tornar a intervenção mais inteligível para todos. A reformulação é aplicada quando o professor sente que a intervenção poderia ser útil, mas precisa ser comunicada de uma forma melhor para se tornar um recurso para os outros. [...] As estratégias de repetição e reformulação [...] fazem de um aluno (o autor da intervenção) um recurso para a aula.
Reformulação com apoio	Quando o professor, além de reformular, adiciona alguns elementos para orientar o trabalho dos alunos.
Recomeço	Quando o professor reage à intervenção de um aluno, que considera interessante para a turma, não dando um feedback direto, mas colocando uma questão relacionada. Desta forma, ao relançar o assunto, o professor fornece um feedback implícito [...] sobre a intervenção do aluno, sugerindo que a questão é interessante e vale a pena ser aprofundada ou, inversamente, tem alguns pontos problemáticos e deve ser reformulada.
Destaque	O destaque ocorre quando o professor chama a atenção para duas ou mais intervenções, representando duas posições distintas, de modo a promover uma comparação. Em contraposição, [...] os autores das duas posições podem ser recursos para a turma e também responsáveis pela sua aprendizagem.

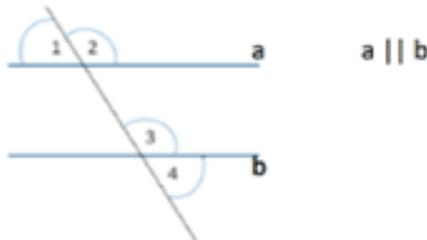
3. Descrição

3.1 Dificuldades identificadas através do questionário B2

A ferramenta de intervenção proposta visa apoiar alunos que têm dificuldades na recuperação de factos geométricos. Isso está ligado, por exemplo, a dificuldades no seguinte item do questionário B2:

2. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a

3.



Qual das afirmações é verdadeira?

- O ângulo 1 e 4 são iguais
- A soma das amplitudes dos ângulos 2 e 3 é 180°
- A soma das amplitudes dos ângulos 1 e 2 é 180°
- O ângulo 3 é maior do que o ângulo 2



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Mais especificamente, as dificuldades estão relacionadas com a recuperação de factos geométricos e com a interpretação da figura (visualizando ângulos e interpretando os seus valores)

3.2 Área cognitiva e domínio matemático envolvidos

A área de dificuldades identificada através do questionário B2 está relacionada com o domínio da Geometria. A Memória é a área cognitiva envolvida.

Na Tabela 1 está a identificação das dificuldades em relação ao domínio matemático e à área cognitiva.

Tabela 1: As dificuldades detetadas estão ligadas à área cognitiva da Memória e ao domínio da Aritmética

	Aritmética	Geometria	Álgebra
Memória		X	
Raciocínio			
Visuo-espacial			

3.3 Objetivos educativos

A ferramenta de intervenção tem por objetivo a construção de estratégias a fim de recuperar factos geométricos e mantê-los na memória, para os usar em determinados raciocínios.

3.4 Destinatários

A atividade sugerida pela ferramenta intervenção pode ser proposta a um único aluno ou a toda a turma.

3.5 Atividades Educativas: a ferramenta de intervenção

A ferramenta de intervenção visa apoiar a memorização e a recuperação de factos geométricos relativos a retas paralelas e a ângulos definidos por uma secante a essas retas. Para isso, propomos usar um software de geometria dinâmica (Geogebra) que permite explorar dinamicamente uma figura geométrica e detetar regularidades.

Tarefa 1

Referimo-nos à atividade que é proposta no site da Geogebra:

<https://www.geogebra.org/m/nfb2rtys>

Os alunos são convidados a explorar a figura dinâmica e responder às perguntas que são propostas. A ideia é que, ao arrastar os elementos geométricos, as propriedades relevantes sejam delineadas. Duas capturas de écran da atividade mostram que os alunos podem explorar a figura de forma dinâmica (arrastando os pontos verdes, as retas paralelas e/ou o movimento da reta secante) e medir muitos pares de ângulos, de modo a detetar relações relevantes.

Tarefa 2

Uma vez identificadas as relações relevantes, os alunos são solicitados a copiar a figura de captura de écran e a colá-la no quadro-negro virtual (como padlet, <https://padlet.com/dashboard>). Para cada figura, os alunos são convidados a escrever uma descrição da relação observada.



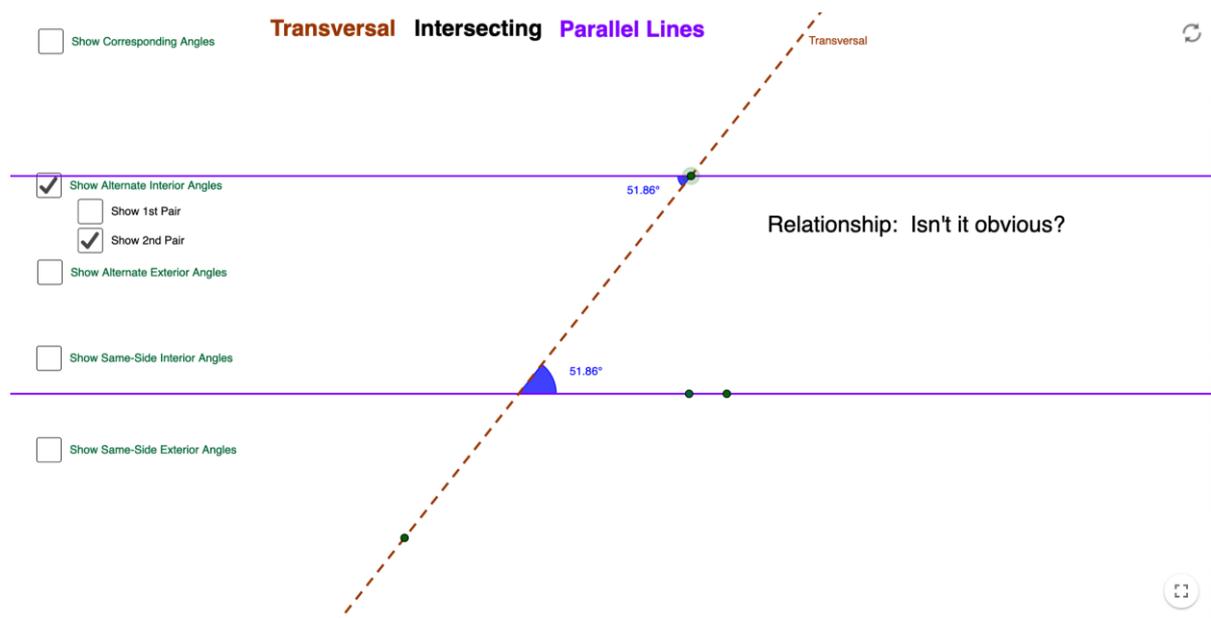
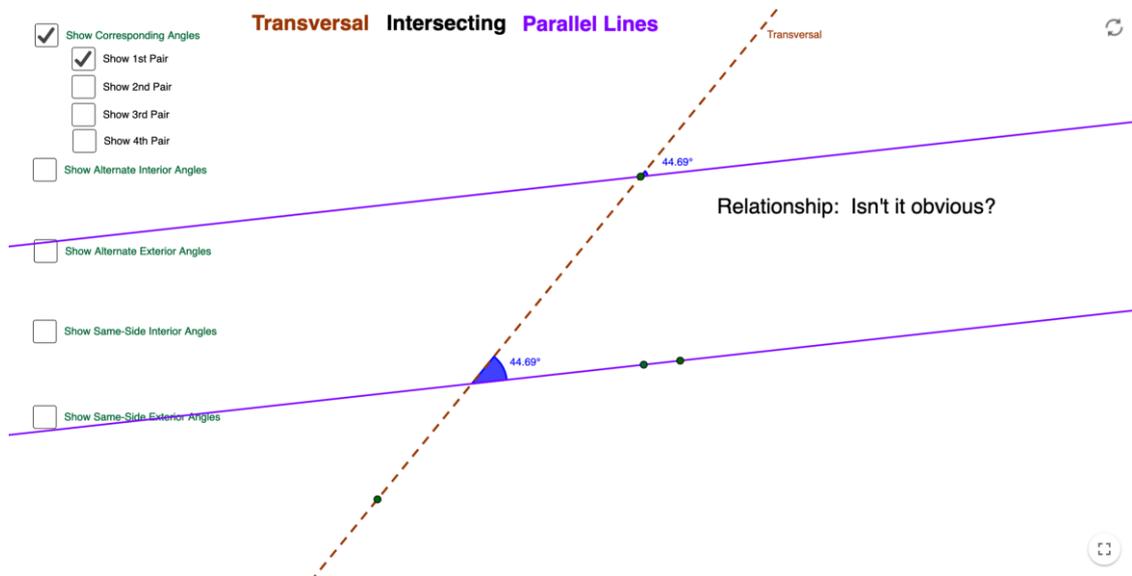
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Assim que todos os alunos tenham feito as suas descrições, o professor pode incentivar uma discussão na turma para registar as propriedades mais importantes.



3.6. Discussão através das diretrizes UDL sobre as atividades mencionadas acima

A atividades foram elaboradas de acordo com os princípios da UDL. A vermelho, aparecem os nossos comentários para ilustrar a ligação entre os princípios da UDL e as nossas atividades.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Tabela 3: Análise das atividades através da Tabela de princípios UDL.

Envolvimento	Representação	Ação & Expressão
<p>Interesse no envolvimento</p> <p>Otimizar a escolha individual e a autonomia</p> <p>Otimizar a relevância, o valor e a autenticidade</p> <p>Minimizar ameaças e distrações</p>	<p>Percepção</p> <p>Oferecer uma forma de personalizar a exibição de informações</p> <p>Oferecer alternativas para informações visuais</p> <p><i>A informação é apresentada através de registos diferentes (visual não verbal, verbal, e simbólica)</i></p>	<p>Ações Físicas</p> <p>Variar o método de resposta e navegação</p> <p><i>O Geogebra apoia a ação física na análise das figuras</i></p>
<p>Esforço e Persistência</p> <p>Aumentar a relevância das metas e objetivos</p> <p>Variar exigências e recursos para otimizar o desafio</p> <p>Promover a colaboração e o espírito de equipa</p> <p>Aumentar o feedback orientado para o professor</p>	<p>Linguagem e Símbolos</p> <p>Esclarecer vocabulário e símbolos</p> <p>Esclarecer a sintaxe e a estrutura</p> <p>Ajudar a descodificação de texto, notação matemática e símbolos</p> <p>Promover a compreensão entre as diferentes linguagens</p> <p>Oferecer linguagem alternativa e símbolos para descodificar informações e trabalhar nas informações</p> <p><i>Isto é conseguido através do uso de diferentes tipos de representação (uso de cores, descrição por escrito, ...)</i></p>	<p>Expressão e Comunicação</p> <p>Usar várias ferramentas para construção e estruturação</p> <p>Construir fluências com níveis graduados de suporte para prática e desempenho</p> <p>Usar registos diferentes com o objetivo de comunicar</p> <p><i>Na parte final da atividade, os alunos são convidados a descrever em linguagem corrente o que descobriram.</i></p>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Project Number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Autorregulação	Compreensão	Funções Executivas
<p>Promover expectativas e crenças que otimizam a motivação</p> <p>Facilitar habilidades e estratégias pessoais de enfrentar situações</p> <p>Desenvolver a autoavaliação e a reflexão</p> <p>Promover a colaboração e o espírito de equipa</p> <p><i>Feedbacks do envolvimento da motivação no uso do software de apoio no que diz respeito à elaboração da solução da tarefa</i></p>	<p>Ativar ou fornecer conhecimento prévio</p> <p>Realçar padrões, características, ideias e relações</p> <p>Guiar o processamento e a visualização de informações</p> <p>Maximizar a transmissão e generalização</p> <p><i>Para apoiar a generalização, as tarefas sugerem visualizar desenhos no GeoGebra. De facto, a função “arrastar” do GeoGebra permite que os alunos identifiquem invariantes da figura e recuperem propriedades</i></p> <p>Ilustrar através de múltiplas representações</p> <p><i>Isto é promovido pelo uso de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Na parte final da atividade, os alunos também são convidados a descrever na linguagem corrente as suas descobertas.</i></p> <p>Apoiar a decodificação de texto, notação matemática e símbolos</p> <p><i>Isto é conseguido através da visualização de hipóteses usando o GeoGebra</i></p>	<p><i>Orientar o estabelecimento de metas adequadas</i></p> <p><i>Apoiar o planeamento e desenvolvimento de estratégias</i></p> <p><i>Facilitar a gestão de informações e de recursos</i></p> <p><i>Os alunos trabalham com software de geometria dinâmica e são levados a organizar as suas descobertas</i></p> <p><i>Aumentar a capacidade de monitorizar os progressos</i></p>

5. Referências bibliográficas

- [1]Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. Australian J. of Learning Difficulties, 21(2), 115–141.
- [2]Duval, R.: 1995, ‘Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processing’, in
- [3]R. Sutherland and J. Mason (eds.), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Springer, Berlin, pp. 142–157.
- [4]Duval, R.: 1998, ‘Geometry from a cognitive point a view’, in C. Mammana and V. Villani (eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37–52.
- [5]UDL Principles: <http://udlguidelines.cast.org/>
- [6]GeoGebra materials: <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC>; <https://www.geogebra.org/m/rSuyACJC#material/R6by3BuA>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.