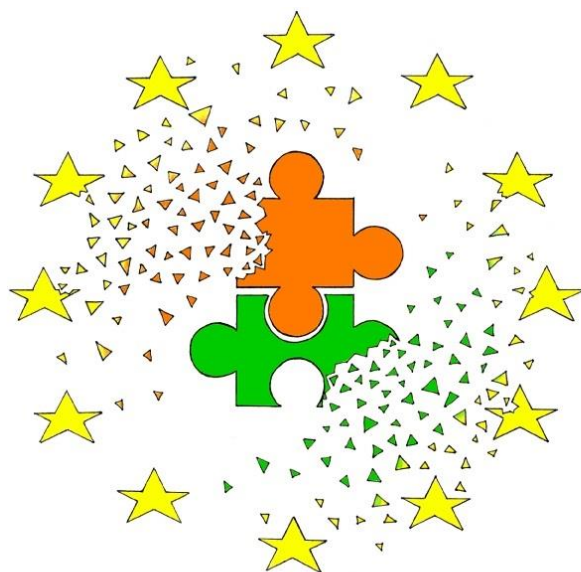




Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Rozdział 3

Jak radzić sobie z Trudnościami i niepełnosprawnością w uczeniu się matematyki



SMILD

Opracowano w ramach projektu europejskiego

SMiLD

Numer projektu: 2018-1-IT02-KA201-048274



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Spis treści

Wstęp	3
3.1 Projektowanie narzędzi interwencji - ramy teoretyczne	3
3.2 Projektowanie narzędzi interwencji - wytyczne	8
3.3 Przykłady narzędzi INTERWENCYJNYCH	12
Bibliografia	26



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Wstęp

Rozdział ten ma na celu przedstawienie i omówienie sposobów radzenia sobie z trudnościami i niepełnosprawnością w uczeniu się matematyki, które to trudności zostały opracowane i przetestowane w ramach projektu SMILD.

Jak wskazano w Rozdziale 1, sposób radzenia sobie z trudnościami i niepełnosprawnością w uczeniu się różni się w poszczególnych państwach. Powszechne jest to, że nauczyciel odgrywa kluczową rolę w identyfikowaniu trudności, ich zrozumieniu i podejmowaniu decyzji, jak postępować, a ostatecznym celem jest pomoc uczniowi. Projekt SMILD jest obmyślany w sposób, aby pracować *dla nauczycieli i razem z nauczycielami* celem pomocy potrzebującym uczniom. Taki sposób radzenia sobie z trudnościami i niepełnosprawnością w uczeniu się jest tworzony w dwóch etapach: na początku konieczne jest zrozumienie trudności, czyli określenie ich profili. W projekcie odbywa się to za pomocą dwóch kwestionariuszy (B1 i B2), które są szczegółowo opisane w Intellectual Output 1. Po zidentyfikowaniu profili trudności uczniów możliwe staje się zaprojektowanie i wdrożenia narzędzi interwencji dla określonej trudności, które następnie mogą być używane przez nauczyciela we wspólnej pracy z jednym uczniem lub podczas nauczania w klasie.

Kluczową cechą całego projektu jest fakt, iż zaprojektowanie kwestionariuszy i narzędzi interwencyjnych jest inspirowane najnowszym stanem wiedzy i praktyki w zakresie matematycznych trudności w uczeniu się i niepełnosprawności. W ramach projektu zidentyfikowaliśmy **narzędzia teoretyczne**, które mogą stanowić ramy dla projektowania narzędzi interwencyjnych i zarządzania nimi w pracy z poszczególnymi uczniami i / lub w klasie. Narzędzia teoretyczne pomogły nam określić **ogólne wytyczne dotyczące zaprojektowania** skutecznych narzędzi interwencyjnych. Ponadto zaprojektowaliśmy i przetestowaliśmy **narzędzia interwencyjne** (Intellectual Output 2), które rozwiązują określone trudności. Produkt końcowy to bezpłatny zestaw narzędzi opartych na technologiach informacyjno-komunikacyjnych dostępnych w języku angielskim oraz w 3 różnych językach reprezentowanych w ramach konsorcjum projektu (włoskim, polskim i portugalskim) celem zapewnienia wzmocnienia potencjału wyników intelektualnych. Ciekawostką jest fakt, iż każdy z partnerów zaproponował narzędzia interwencyjne, które zostały zaprojektowane w odniesieniu do konkretnego kontekstu krajowego, a które teraz, dzięki projektowi, mogą być wykorzystywane także przez nauczycieli z innych krajów. Inną istotną kwestią jest fakt, że projekt został poddany międzynarodowemu dyskursowi, a więc każde narzędzie interwencji zostało ulepszone dzięki komentarzom partnerów projektu.

Rozdział ten zawiera:

- Ramy teoretyczne, wykorzystane do zaprojektowania skutecznych narzędzi interwencji; ramy te odnoszą się zarówno do edukacji integrującej (zasady udl, Patrz: <http://udlguidelines.cast.org/>), jak i do oceniania kształtującego (zainspirowanego projektem fasméd, Patrz: <https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>);
- Wytyczne, opracowane w celu projektowania narzędzi interwencyjnych; wytyczne te powinny stanowić ramy dla tworzenia innych narzędzi interwencyjnych przez nauczycieli czytających ten rozdział;
- Kilka przykładów zaprojektowanych i przetestowanych narzędzi interwencyjnych; więcej narzędzi interwencji opisano w Intellectual Output 2.

Treści opracowywane są celem pełnego wykorzystania technologii informacyjno-komunikacyjnych i mediów dostępnych on-line i są nakierowane na nauczanie i uczenie się matematyki, odwołując się do zewnętrznych linków do portali, stron internetowych, publikacji on-line, dokumentów pdf, filmów itp.

3.1 Projektowanie narzędzi interwencji - ramy teoretyczne

Karagiannakis i współpracownicy (2016) proponują model klasyfikujący umiejętności matematyczne związane z uczeniem się matematyki w czterech dziedzinach: liczba podstawowa, pamięć, rozumowanie i wizualno-przestrzenna (Tabela 1). Odkrycia potwierdzają hipotezę, że trudności w uczeniu się matematyki mogą mieć wiele przyczyn, tym



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

samym badania umożliwiają szkicowanie matematycznych profili uczenia się uczniów.

Tabela pomaga scharakteryzować trudności uczniów w uczeniu się matematyki.

Tabela 1: Ramy Karagiannakisa i współpracowników: dziedziny czterotorowego modelu i zestawy umiejętności matematycznych związanych z każdą dziedziną

Dziedzina	Umiejętności matematyczne związane z dziedziną
Liczby podstawowe	Dokładne oszacowanie małej liczby obiektów (do 4); szacowanie przybliżonych ilości; umieszczanie liczb na osiach liczbowych; zarządzanie symbolami arabskimi; transkodowanie liczby z jednej reprezentacji na drugą (analogiczno-arabsko-werbalne); świadomość zasad liczenia.
Pamięć (wyszukiwanie i przetwarzanie)	Wyszukiwanie faktów liczbowych; dekodowanie terminologii (licznik, mianownik, równoramiennie, równoboczne); zapamiętywanie twierdzeń i wzorów; płynne wykonywanie obliczeń umysłowych; zapamiętywanie procedur i śledzenie kroków.
Rozumowanie	Uchwycenie pojęć, idei i relacji matematycznych; zrozumienie etapów złożonych procedur / algorytmów; uchwycenie podstawowych zasad logicznych (warunkowość - stwierdzenia „jeśli... to...” - przemienność, inwersja); uchwycenie semantycznej struktury problemów; (strategiczne) podejmowanie decyzji; uogólnianie.
Wizualno-przestrzenna	Interpretacja i wykorzystanie przestrzennej organizacji reprezentacji obiektów matematycznych (na przykład liczby w zapisie dziesiętnym, wykładniki, figury geometryczne 2D i 3D lub obroty); umieszczanie liczb na osi liczbowej; mylące cyfry arabskie i symbole matematyczne; wykonywanie pisemnych obliczeń, kiedy pozycja jest ważna (np. pożyczanie / przenoszenie); interpretacja wykresów i tabel.

Przypominamy, iż w modelu uwzględniono również projekt Kwestionariusza B2, mający na celu lepsze zrozumienie profili trudności uczniów. Konstruując B2 wybraliśmy pytania, które dotyczyły obszarów poznawczych, a także trzech dziedzin matematyki: arytmetyki, geometrii, algebry (liczba podstawowa nie jest związana ze wszystkimi obszarami poznawczymi). W rezultacie zaproponowaliśmy pytania, które znajdowały się w niektórych komórkach poniższej tabeli (Tabela 2).

Tabela 2: Podwójny związek między obszarami poznawczymi (pamięć, rozumowanie i wizualno-przestrzenny) a dziedzinami matematycznymi (arytmetyka, geometria, algebra).

	Arytmetyka	Geometria	Algebra
Pamięć			
Rozumowanie			
Wizualno-przestrzenny			

Tabela 3: Wytyczne UDL



Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Ta sama tabela została użyta do zaprojektowania narzędzi interwencyjnych. W tym miejscu przedstawiamy dodatkowe odniesienia teoretyczne, które wspierają projektowanie narzędzi interwencji.

Przed wszystkim odnosimy się do zasad **Universal Design for Learning (UDL)** (Tabela 3), stworzonych specjalnie dla projektowania integrujących działań edukacyjnych (<http://udlguidelines.cast.org/>).

Dostarcza sposoby ZAANGAŻOWANIA	Dostarcza sposoby REPREZENTACJI	Dostarcza sposoby DZIAŁANIA i TWORZENIA
Skuteczne powiązania - „DLACZEGO” uczenia się	Powiązania rozpoznanie - „CO” uczenia się	Strategiczne powiązanie – „JAK” uczenia się
Dostarcza możliwości służących Nastawienie na Pozyskanie <ul style="list-style-type: none"> Optymalizuje indywidualny wybór i autonomię Optymalizuje trafność, wartość i autentyczność Minimalizuje zagrożenia i elementy rozprasające 	Dostarcza możliwości służących Postrzeganiu: <ul style="list-style-type: none"> Oferuje sposób dostosowania sposobu wyświetlania informacji Proponuje alternatywy dla informacji dźwiękowych Oferuje alternatywy dla informacji wizualnych 	Dostarcza możliwości służących Fizycznym Działaniom: <ul style="list-style-type: none"> Zmienia metodę reagowania i nawigacji Optymalizuje dostęp do narzędzi i technologii pomocniczych
Zapewnia możliwości trwałego wysiłku i wytrwałości: <ul style="list-style-type: none"> Zwiększa znaczenie celów i zadań Zmniejsza wymagania i zasoby, aby zoptymalizować wyzwanie Wspiera współpracę i społeczność Zwiększa informacje zwrotne zorientowane na mistrza 	Zapewnia możliwości Języka & Symboli: <ul style="list-style-type: none"> Wyjaśnia słownictwo i symbole Wyjaśnia składnię i strukturę Obsługuje dekodowania tekstu, notacji matematycznej i symboli Promuje zrozumienie w różnych językach Ilustruje za pomocą wielu mediów 	Zapewnia możliwości Tworzenia i komunikacji: <ul style="list-style-type: none"> Używa mediów do komunikacji Używa wielu narzędzi do budowy i kompozycji Buduje biegłość dzięki stopniowanemu poziomowi wsparcia dla ćwiczeń i wydajności
Zapewnia możliwości auto-regulacji: <ul style="list-style-type: none"> Promuje oczekiwania i przekonania, które optymalizują motywację Ułatwia osobiste umiejętności i strategię radzenia sobie Rozwija samoocenę i refleksję 	Zapewnia możliwości Rozumienia: <ul style="list-style-type: none"> Aktywuje lub dostarcza wiedzę podstawową Podkreśla wzór, krytyczne cechy, wielkie pomysły i relacje Przewodnik przetwarzania i wizualizacji informacji Maksymalizuje transfer i generalizację 	Zapewnia możliwości Funkcji wykonawczej: <ul style="list-style-type: none"> Wskazuje właściwe wyznaczenie celów Wspiera planowanie i opracowywanie strategii Ułatwia zarządzanie informacjami i zasobami Zwiększa możliwości monitorowania postępów
Eksperti, którzy są...		
Zdecydowani i zmotywowani	Zaradni i kompetentni	Strategiczni i ukierunkowani na cel

Center for Applied Special Technology (CAST) opracowało kompleksowe ramy wokół koncepcji Universal Design for Learning (UDL), mając na celu skoncentrowanie badań, rozwoju i praktyki edukacyjnej na zrozumieniu różnorodności i ułatwianiu uczenia się. UDL zawiera zestaw zasad, wyrażonych w *Wytycznych i punktach kontrolnych (Guidelines and Checkpoints)*.¹ Badania, na których opiera się struktura UDL, wykazują, iż „uczniowie bardzo różnie reagują na instrukcje. [...]”

¹ For a complete list of the principles, guidelines and checkpoints and a more extensive description of CAST’s activities, visit <http://www.udlcenter.org>



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Z tego powodu UDL koncentruje się na indywidualnych różnicach, traktując je jako ważny element, celem zrozumienia i zaprojektowania skutecznych instrukcji uczenia się.

W tym celu UDL rozwija trzy podstawowe zasady: 1) dostarcza wielu środków reprezentacji, 2) dostarcza różnorodne środki działania i ekspresji, 3) dostarcza wiele sposobów zaangażowania. W szczególności wytyczne wchodzące w skład pierwszej zasady odnoszą się do sposobów percepcji związanych z otrzymaniem informacji oraz rozumieniem otrzymanych informacji. Wytyczne w ramach drugiej zasady uwzględniają opracowanie informacji / pomysłów i ich wyrażanie. Wreszcie wytyczne w ramach trzeciej zasady dotyczą dziedziny „afektu” i „motywacji”, które są istotne w każdej działalności edukacyjnej.

W naszych analizach skupimy się w szczególności na konkretnych wytycznych zawartych w trzech Zasadach.²

Wytyczne w ramach Zasady 1, które dostarczają wielu sposobów reprezentacji, sugerują proponowanie różnych możliwości percepcji i wsparcie dla dekodowania notacji matematycznej i symboli. Ponadto wytyczne sugerują, jak ważne jest zapewnienie opcji zrozumienia wzorców, cech krytycznych, wielkich idei i związków między pojęciami matematycznymi. W związku z tym zaproponujemy użycie oprogramowania AlNuSet do sterowania przetwarzaniem informacji, wizualizacją i manipulacją w celu maksymalizacji transferu i uogólnienia.

Co więcej, wytyczne z Zasady 2, które zapewniają różnorodne środki działania i wyrażania, sugerują oferowanie różnych opcji wypowiedzi i komunikacji wspierających planowanie i opracowywanie strategii. Wreszcie, wytyczne z Zasady 3 pokazują, w jaki sposób określone działania mogą wzbudzić zainteresowanie uczniów, optymalizując indywidualny wybór i autonomię oraz minimalizując zagrożenie i rozproszenie.

W części 4 przedstawimy przykłady ćwiczeń, każdorazowo omawiając rodzaj matematycznego uczenia się, do którego się odnoszą, oraz obszar poznawczy, który wspierają. Pokażemy, w jaki sposób te przykłady zostały zaprojektowane w ramach zasad UDL, aby uczynić je inkluzywnymi i skutecznymi w pokonywaniu trudności matematycznych zidentyfikowanych w kwestionariuszu B2.

Kolejne odniesienie teoretyczne, do którego się odwołujemy, pochodzi z doświadczeń europejskiego projektu FasMed, koncentrującego się na ocenianiu kształtującym w matematyce i naukach ścisłych, (<https://research.ncl.ac.uk/fasmed/>).

Ocenianie kształtujące (OK), ang. *formative assessment*, jest pomyślane jako metoda nauczania, w której „nauczyciele, uczniowie i ich rówieśnicy gromadzą, interpretują i wykorzystują dane dotyczące osiągnięć uczniów, aby podejmować decyzje o kolejnych krokach w nauczaniu, które prawdopodobnie będą lepsze, lub lepiej uzasadnione, niż decyzje, które podjęliby w przypadku braku zebranych danych”(Black & Wiliam, 2009, s. 7). Projekt FaSMEd odnosi się do badania Williama i Thompsona (2007), które identyfikuje pięć kluczowych strategii praktyk OK w środowisku szkolnym: a) wyjaśnianie i dzielenie się powodami i celami uczenia się i kryteriami sukcesu; (b) opracowywanie skutecznych dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które dostarczają dowodów (danych) rozumienia przez uczniów; (c) dostarczanie informacji zwrotnych, które aktywizują uczniów do dalszego rozwoju; (d) aktywizowanie uczniów rozumianych jako źródła dydaktyczne dla siebie nawzajem; (e) aktywizowanie uczniów rozumianych jako właściciele własnej nauki. Nauczyciel, rówieśnicy ucznia i sam uczeń są czynnikami sprawczymi, którzy aktywują te strategie OK. Strategie OK podsumowano w tabeli 4.

Tabela 4

	Dokąd zmierza uczeń	Gdzie uczeń jest teraz	Jak się tam dostał
Nauczyciel	1 Wyjaśnienie powodów uczenia się i kryteria sukcesu	2 Projektowanie efektywnej dyskusji w klasie i innych zadań edukacyjnych, które potwierdzają zrozumienie przez uczniów	3 Providing feedback that moves learners forward
Rówieśnik	Zrozumienie i dzielenie się powodami i celami uczenia się i kryteriami sukcesu	4 Aktywizacja uczniów jako źródeł dydaktycznych dla siebie nawzajem	
Uczeń	Zrozumienie powodów i celów uczenia się i kryteriów sukcesu	5 Aktywizacja uczniów jako właścicieli własnej nauki	

² The items are taken from the interactive list at <http://www.udlcenter.org/research/researchevidence>





Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Zgodnie z taką konceptualizacją oceniania kształtującego, w ramach Europejskiego Projektu FaSMEd zaprojektowano i przetestowano kilka zajęć klasowych, wykorzystujących technologię wspierania strategii oceniania kształtującego.

Ćwiczenia FaSMEd są zorganizowane w sekwencje, które obejmują pracę grupową nad arkuszami roboczymi i dyskusję w klasie, podczas której wybrane prace grupowe omawiane są przez całą klasę pod okiem nauczyciela. Biorąc pod uwagę strategię oceniania kształtującego i funkcje technologiczne, Cusi, Morselli i Sabena (2017, s. 758) zaprojektowali trzy rodzaje arkuszy roboczych do zajęć w klasie:

- „(1) arkusze zadań: arkusze przedstawiające problem i zadające jedno lub więcej pytań obejmujących interpretację lub konstrukcję reprezentacji (werbalnej, symbolicznej, graficznej, tabelarycznej) relacji matematycznej między dwiema zmiennymi (np. Interpretacja wykresu czas-odległość);
- (2) arkusze pomocnicze, mające na celu wspieranie uczniów, mających trudności z arkuszami zadań, poprzez przedstawianie konkretnych sugestii (np. Pytań prowadzących);
- (3) arkusze ankiet: arkusze z pytaniami w formie ankiety proponowanych opcji.”

Autorzy zidentyfikowali strategie informacji zwrotnej (tabela 5), które nauczyciel może zastosować celem przekazania uczniom informacji zwrotnej (Cusi, Morselli i Sabena, 2018, s. 3466). Strategie te są wykorzystywane podczas dyskusji w klasie, uruchomionej przez nauczyciela zaraz po pracy grupowej nad arkuszami roboczymi.

Tabela 5:

Powtarzanie	Nauczyciel naśladuje interwencję wybranego ucznia, aby zwrócić na nią uwagę. Często podczas powtarzania nauczyciel akcentuje intonacją głosu niektóre kluczowe słowa lub zdania. Zmiana sformułowania ma miejsce, gdy nauczyciel przeformułuje interwencję (zachowanie) ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i uczynienie interwencji bardziej zrozumiałą dla wszystkich.
Przeformułowanie	Przeformułowanie ma miejsce, gdy nauczyciel inaczej sformułuje interwencję ucznia, mając na celu zwrócenie uwagi klasy i uczynienie interwencji bardziej zrozumiałą dla wszystkich. Przeformułowanie jest stosowane, gdy nauczyciel uważa, że interwencja może być użyteczna, ale należy ją przekazać w lepszy sposób, by w ten sposób stała się zasobem dla innych. [...] Strategie rewizji i przeformułowania [...] zamieniają ucznia (autora interwencji) w zasób dla klasy.
Przeformułowanie ze wsparciem	Kiedy nauczyciel oprócz przeformułowania dodaje także elementy, które kierują pracą uczniów.
Ponowne uruchomienie	Nauczyciel reaguje na interwencję ucznia, którą uważa za interesującą dla klasy, nie udziela bezpośredniej informacji zwrotnej, ale stawia powiązane pytanie. W ten sposób, poprzez ponowne uruchomienie nauczyciel dostarcza ukrytej informacji zwrotnej [...] na temat interwencji ucznia sugerując, że kwestia jest interesująca i warta pogłębienia lub, przeciwnie, ma pewne problematyczne punkty i należy ją przerobić.
Kontrastowanie	Kontrastowanie ma miejsce, gdy nauczyciel zwraca uwagę na dwie lub więcej interwencji, przedstawiających dwie różne pozycje, aby ułatwić porównanie. Uczniowie [...], autorzy obu pozycji, stają się zasobem dla klasy, będąc odpowiedzialni za własną naukę.





Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Z doświadczeń FaSMEd czerpiemy ideę tworzenia zajęć w klasie w perspektywie oceniania kształtującego, promującego integrację. Przykładem aktywności FaSMEd jest aktywność zwana *Wykresy odstępów czasowego (Time-distance graphs activity)*, która zostanie przedstawiona w rozdziale 4.

3.2 Projektowanie narzędzi interwencji - wytyczne

Po zidentyfikowaniu obszarów trudności za pomocą kwestionariusza B2, możliwe jest zaprojektowanie działań edukacyjnych specjalnie zaprojektowanych dla uczniów z Trudnościami w uczeniu się matematycznym - TUM - ze szczególnym uwzględnieniem integracji.

W szczególności, Narzędziami Interwencji mogą być:

- W formie wyartykułowanych zajęć, które należy przeprowadzić z całą klasą, z perspektywy integracji;
- W formie konkretnych ćwiczeń, które mogą pomóc uczniowi mającemu trudności lub wszystkim uczniom klasy we wspólnej pracy nad tym samym zajęciem.

W rozdziale 4 przedstawiamy kilka przykładów narzędzi interwencyjnych skoncentrowanych na następujących zagadnieniach matematycznych:

- **kalkulacja mentalna**, gdy trudność jest głównie związana z obszarem poznawczym Pamięci;
- **znaczenie zmiennej i wyrażenia w zależności od takiej zmiennej**, gdy trudność związana jest głównie z obszarem poznawczym Rozumowania;
- **składnia pozycyjna w wyrażeniach algebraicznych**, gdy trudność jest głównie związana z Wizualno-przestrzennym obszarem poznawczym;
- **interpretacja wykresów**, gdy trudność związana jest głównie z Wizualno-przestrzennym obszarem poznawczym.

Poniższa tabela (Tabela 6) przedstawia wspomniane zagadnienia matematyczne i ich związki z obszarami poznawczymi i dziedzinami matematycznymi.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Tabela 6: Pierwsza lista zagadnień matematycznych w obszarach trudności zidentyfikowanych za pomocą kwestionariusza B2.

	Arytmetyka	Geometria	Algebra
Pamięć	<p>Znajomość i stosowanie procedur i strategii. Na przykład obliczenie w pamięci 36×11. Skuteczna strategia mentalnego rozwiązania tej operacji wymaga rozkładu liczby 11 na $10 + 1$ i zastosowania własności dystrybucyjnej, jak w następującym przykładzie: $36 \times 10 = 360$ Następnie należy obliczyć wynik częściowy 36×10 (360) i dodać go do 36: $36 \times 10 + 36 = 396$. Uczniowie muszą odzyskać wyniki pośrednie.</p>		
Rozumowanie			<p>Znaczenie zmiennej i jednego wyrażenia z jedną zmienną</p> <p>Na przykład uczniowie mogą mieć trudności z odpowiedzią na następujące pytania:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Jeśli $a = 3$, jaka jest wartość $2a + 1$? - Jeśli $x = 4$, jaka jest wartość $24 / x$?
Wizualno-przestrzenny			<p>Uczniowie mogą mieć trudności w radzeniu sobie z obiektami matematycznymi ze względu na ich przestrzenną reprezentację. Obiekty matematyczne, które mogą być poważne, to na przykład algebraiczne wyrażenia zawierające potęgi, ponieważ konieczne jest rozpoznanie pozycji symbolu, który zmienia swoją rolę w wyrażeniu zgodnie ze swoim położeniem. Na przykład mogą pojawić się trudności z rozróżnieniem następujących żądań:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $x^2 =$ - $2x =$ - $x^2 =$ <p>Kolejnym obiektem matematycznym, który jest ważny, jest wykres na płaszczyźnie kartezjańskiej.</p>

Jako ogólny komentarz metodologiczny zwracamy uwagę, że naszym celem jest zaprojektowanie dobrze sformułowanych sekwencji nauczania, obejmujących również pracę w grupach i dyskusję matematyczną pod okiem nauczyciela. Sekwencje nauczania mają na celu rozwiązanie określonych trudności w uczeniu się w perspektywie włączającej. Ćwiczeń nie należy traktować jako zwykłych ćwiczeń, chyba że pełnią one rolę treningu poznawczego. W treningu poznawczym uczeń wykonuje serię ćwiczeń, które koncentrują się na tej samej treści matematycznej, używając technologii ICT do powtarzania sekwencji.



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Aby wesprzeć komunikację i wymianę narzędzi interwencyjnych wśród partnerów i wszystkich nauczycieli, którzy mogą być zainteresowani projektem, opracowaliśmy dwa szablony do prezentacji narzędzia interwencyjnego.

1. Szablon IO1F jest tabelą do wypełnienia przez autora narzędzia interwencji, zawierającą wszystkie podstawowe informacje o narzędziu interwencyjnym.
2. Szablon IO1G zawiera pełny opis narzędzia interwencji. Aby było wewnętrznie zgodne, musi zawierać odniesienia teoretyczne, które stanowią ramy dla projektu i wdrożenia narzędzia.

Szablony są przedstawione poniżej:

IO1.F – OPIS NARZĘDZIA INTERWENCJI	
Tytuł narzędzia interwencji*	<i>Proszę wpisać tytuł narzędzia interwencji</i>
Praca, dla jakiej jest stworzony*	<input type="checkbox"/> Indywidualna <input type="checkbox"/> W klasie
Obszar poznawczy i dziedzina matematyczna* <i>Możesz wybrać tylko jedną opcję</i>	<input type="checkbox"/> Liczby podstawowe <input type="checkbox"/> Pamięć / Arytmetyka <input type="checkbox"/> Pamięć / Geometria <input type="checkbox"/> Pamięć / Algebra <input type="checkbox"/> Rozumowanie / Arytmetyka <input type="checkbox"/> Rozumowanie / Geometria <input type="checkbox"/> Rozumowanie / Algebra <input type="checkbox"/> Wizualno-przestrzenne / Arytmetyka <input type="checkbox"/> Wizualno-przestrzenne / Geometria <input type="checkbox"/> Wizualno-przestrzenne / Algebra
Zasady Universal Design for Learning* <i>Możesz wybrać tylko jedną opcję</i>	<input type="checkbox"/> Zaangażowanie / Nastawienie receptywne <input type="checkbox"/> Zaangażowanie / Podtrzymywanie wysiłków i wytrwałości <input type="checkbox"/> Zaangażowanie / Autoregulacja <input type="checkbox"/> Reprezentacja / Postrzeganie <input type="checkbox"/> Przedstawienie / Język i symbole <input type="checkbox"/> Reprezentacja / Zrozumienie <input type="checkbox"/> Działanie i ekspresja / Działanie fizyczne <input type="checkbox"/> Działanie i ekspresja / Ekspresja i komunikacja <input type="checkbox"/> Działanie i ekspresja / Funkcje wykonawcze
Strategie oceniania kształtującego* <i>Możesz wybrać więcej niż jedną opcję</i>	<input type="checkbox"/> Wyjaśnienie powodów uczenia się i kryteriów sukcesu <input type="checkbox"/> Projektujące dyskusje w klasie <input type="checkbox"/> Dostarczanie opinii <input type="checkbox"/> Aktywowanie zasobów do nauki własnej <input type="checkbox"/> Aktywizowanie uczniów jako właścicieli własnej nauki



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Niezbędne wyposażenie*	<i>Proszę o wpisanie sprzętu (komputer, tablet, projektor, specjalne oprogramowanie...) potrzebnego do wykonania narzędzia interwencyjnego</i>
Szacowany czas*	<i>Proszę o wpisanie szacowanego czasu niezbędnego do wykonania zadania</i>
Opis*	<i>Proszę o wpisanie krótkiego opisu narzędzia interwencyjnego</i>
Cel edukacyjny*	<i>Proszę o wpisanie celu edukacyjnego narzędzia interwencyjnego</i>
Bibliografia*	<i>Proszę o wpisanie literatury użytej do zaplanowania niniejszego narzędzia interwencyjnego</i>
Anneks	<i>Proszę o wpisanie krótkiego opisu praktycznych aktywności narzędzia interwencyjnego używając szablonu IOI.G - Intervention Tool.</i>

IOI.G – NARZĘDZIE INTERWENCYJNE
<p>Wstęp W tej części przedstawiono ogólne wprowadzenie do narzędzia interwencji.</p> <p>Ramy teoretyczne W tej części, przedstawiono wspólne teoretyczne ramy odniesienia.</p> <p>Projektowanie W tej części, szczegółowo przedstawiono działania narzędzia interwencji:</p> <ul style="list-style-type: none">• Trudności zidentyfikowane za pomocą kwestionariusza B2 Narzędzie interwencji przedstawiono w odniesieniu do konkretnej trudności, namierzonej za pomocą kwestionariusza.• Obszar poznawczy i dziedzina matematyczna Określona trudność, o której mowa w podrozdziale 3.1, winna być związana z obszarem poznawczym i matematyczną dziedziną zainteresowań.• Cel edukacyjny Po zidentyfikowaniu trudności narzędzie interwencji powinno mieć na celu rozwiązanie takiej trudności.• Przeznaczone dla Ucznia / Klasy Narzędzie interwencji może być skierowane do klasy lub do jednego ucznia.• Aktywności edukacyjne: Narzędzie interwencji W tym podrozdziale należy szczegółowo opisać działania.. <p>Bibliografia Bibliografia jest już wskazana.</p>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

3.3 Przykłady narzędzi INTERWENCYJNYCH

Narzędzie interwencyjne 1

Przedstawiamy narzędzie interwencyjne, które może być przydatne w odniesieniu do trudności wskazanej w punkcie B2, Q3A11 i Q3A12:

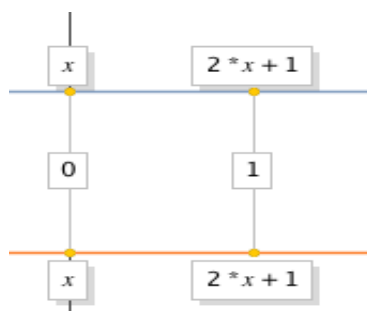
Jeśli $a=3$, jaka jest wartość $2a+1$?

Jeśli $x=-4$, jaka jest wartość $24/x$?

Jak już wskazaliśmy, trudność tutaj jest powiązana z dziedziną poznawczą Rozumowania i dziedziną Algebry. Narzędzie interwencyjne ma zatem na celu Konstruowanie Znaczenia³ zmiennej lub wyrażenia z jedną zmienną.

Tutaj zostaną opisane aktywności edukacyjne przeznaczonych dla klasy.

Projektowanie takich aktywności opiera się na zastosowaniu zasad UDL w celu uczynienia tych aktywności integrującymi. W szczególności opisanych zostanie wiele sposobów reprezentacji, które promują zarówno zaangażowanie uczniów, jak i ich działanie i ekspresję.



1) Dynamiczna reprezentacja zmiennej i wyrażenie zależnego od tej zmiennej.

Pierwszy pomysł w zaprojektowaniu tej aktywności powstał w oparciu o wykorzystanie oprogramowania AlNuSet, (<http://www.alnuset.com/en/alnuset>). AlNuSet powstał z myślą o uczniach szkół średnich (w wieku od 12-13 do 16-17 lat) i składa się z trzech oddzielnych środowisk, które są ściśle ze sobą zintegrowane: linia algebraiczna, manipulator algebraiczny i płaszczyzna kartezjańska. Teraz opiszemy cechy linii algebraicznej w następującym ćwiczeniu⁴, które wspierają konceptualizację algebraicznych pojęć zmiennej i wyrażenia w zależności od tej zmiennej (Robotti, E. 2016; Robotti E., Baccaglioni-Frank A., 2017).

Na Linii algebraicznej można umieszczać zmienne i wyrażenia, które od nich zależą. Aby to zrobić, użytkownik musi wpisać literę, na przykład „x”, a na linii pojawi się punkt ruchomy. Punkt może się różnić w ramach wybranego zbioru liczb (naturalnych, całkowitych, wymiernych lub rzeczywistych⁵) a zmienność może być kontrolowana bezpośrednio przez użytkownika poprzez przeciąganie. Zostało to tak zaprojektowane, aby ukazać ważne cechy zmiennej. Ponadto na linii można konstruować wyrażenia zależne od wybranej zmiennej, na przykład $2x+1$. Na to wyrażenie zależne nie można bezpośrednio działać, ale będzie ono przesuwane w zależności od miejsca, w które x zostanie przeciągnięte. Wyrażenie zależne przyjmie pozycję w wierszu odpowiadające wartości, którą zmienna zależna przyjmuje, gdy jest przeciągnięta (Rysunek 1).

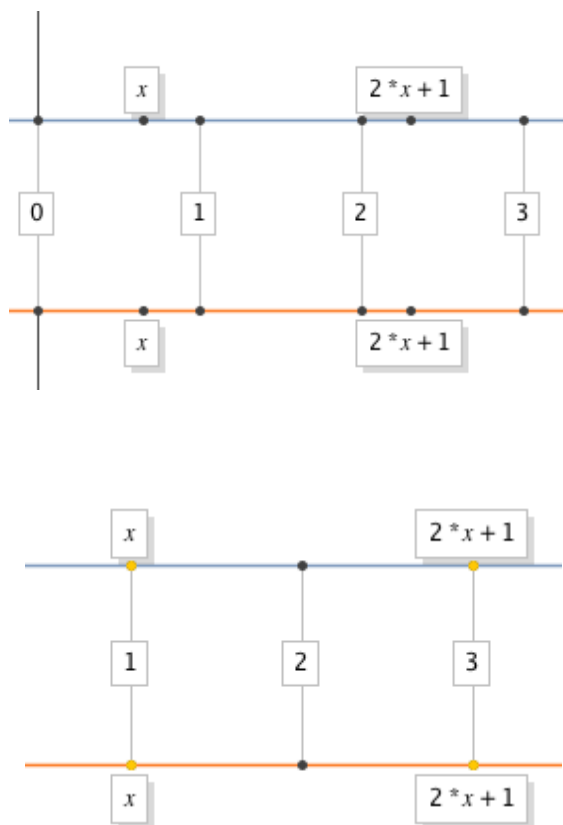
³ We point out that this doesn't just mean calculating the value of expressions nor manipulating algebraic expressions!

⁴ For a more detailed description of these environments see www.alnuset.com

⁵ Of course the representations of the numerical sets are accomplished on a computer, so the sets are actually finite and discrete, but they simulate – with some limitations – the properties of the number sets they represent.

Rysunek 1. Ruch zmiennej x na prostej algebraicznej powoduje ruch wyrażenia zależnego $2x+1$ na prostej.

Rysunek 1:



Zauważamy, że opisane funkcje ukazują różne reprezentacje (Zasada UDL 1) i mają na celu wspieranie użytkownika w użyciu algebraicznego pojęcia zmiennej i wyrażenia zależnego poprzez tzw. „dynamiczny model”, na który można oddziaływać (Zasada UDL 2). Użycie może odbywać się dzięki kanałom wizualnym i kinestetycznym, bez konieczności stosowania wizualnych środków werbalnych (język pisany). Konstrukcja pojęcia w ten sposób uzyskana pozwala uczniom, głównie tym z TUM, znaleźć odniesienia mnemoniczne odpowiednie dla ich sposobów poznawczych. Pozwala to zacząć używać reprezentacji podstawowych pojęć algebraicznych w grze i być może umieszczać je w pamięci długotrwałej, by następnie odzyskiwać je stamtąd w bardziej efektywny sposób.

Dzięki wsparciu AlNuSet, nauczyciel może promować dyskusję wśród uczniów klasy w celu konceptualizacji pojęcia zmiennej.

W rzeczywistości nauczyciel może poprosić uczniów, aby przesunęli x wzdłuż linii i odpowiedzieli na następujące pytania: „Co możesz zaobserwować?” Albo „Jak interpretujesz to, co się właśnie dzieje?”.

Ponadto nauczyciel może również promować dyskusję wśród uczniów w celu konceptualizacji idei *wyrażenia w zależności od zmiennej x* .

Z tego powodu nauczyciel prosi uczniów o wpisanie „ $2x+1$ ” w edytorze linii algebraicznej, a następnie rozpoczyna dyskusję, zadając następujące pytanie: „Co dzieje się na prostej algebraicznej?”



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

„Jak interpretujesz, co dzieje się z wyrażeniem algebraicznym $2x+1$?”

Za pierwszym razem, być może będzie interesujące ukazanie definicji hipotezy bez dynamicznego wsparcia AINuSet.

Dlatego nauczyciel może zapytać uczniów: „Jeśli $x=3$, to jak myślisz, jaka będzie wartość wyrażenia $2x+1$? Postaw swoją hipotezę, porównaj ją z kolegami z klasy, a następnie zweryfikuj ją na linii algebraicznej AINuSet”.

Dyskusja (prowadzona przez nauczyciela) na temat tego, co uczniowie obserwują na linii algebraicznej i jak mogą to zinterpretować w sposób algebraiczny, pozwala uczniom skonstruować znaczenie *zmiennej i wyrażenia w zależności od takiej zmiennej*.

2) Reprezentacja relacji między zmienną a wyrażeniem zależnym od takiej zmiennej na płaszczyźnie kartezjańskiej i w tabeli

Rozważamy tabelę określającą relację między zmienną „ x ” a wyrażeniem $2x+1$.

x	$2x+1$
1	
2	
3	
0	
-1	
-4	

Nauczyciel prosi uczniów o wyliczenie wartości wyrażenia $2x+1$, zaczynając od wartości zmiennej niezależnej „ x ”:

x	$2x+1$
1	$2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$
2	$2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$
3	$2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$
0	$2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$
-1	$2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$
-4	$2 \cdot (-4) + 1 = -8 + 1 = -7$



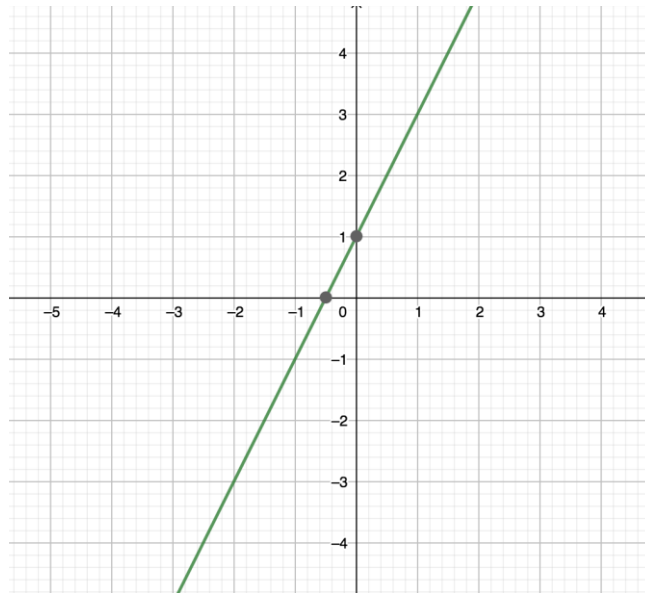
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Nauczyciel prosi uczniów o narysowanie relacji na płaszczyźnie kartezjańskiej:

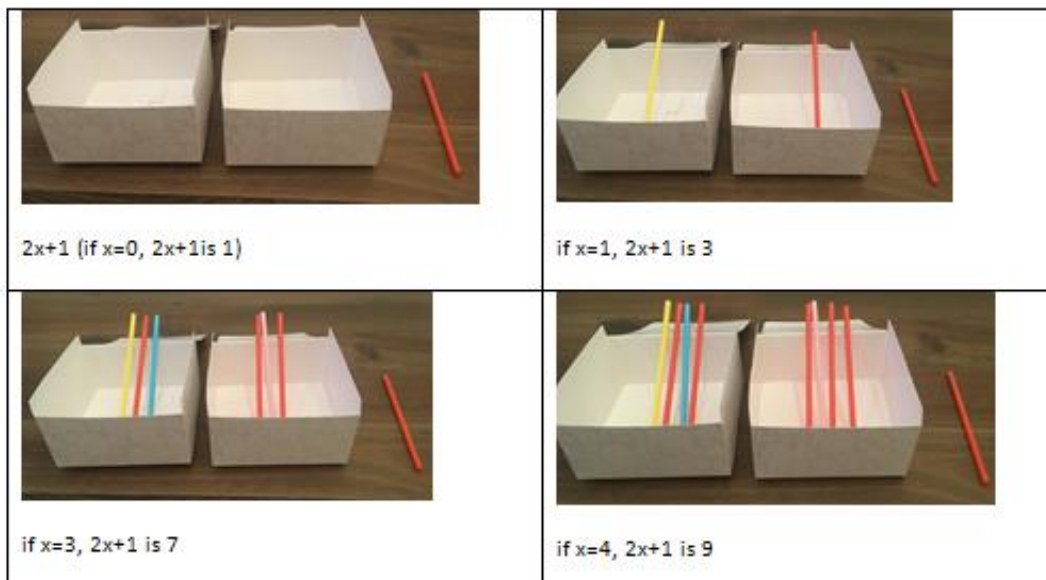


Nauczyciel prowadzi dyskusję na temat relacji między x a wyrażeniem $2x+1$ zarówno poprzez reprezentację geometryczną (na płaszczyźnie kartezjańskiej), jak i relację algebraiczną (w tabeli), tak, aby uczniowie mogli przejść od jednego zakodowania do drugiego (proces transkodowania).

3) Konkretna reprezentacja zmiennej i wyrażenia zależnego od tej zmiennej

Nauczyciel prezentuje dwa identyczne pudełka (każdy reprezentuje x) i 1 słomkę (stała) (Rysunek 2). Zmieniając liczbę słomek w skrzynkach (to samo dla obu, czyli zmieniając wartość zmiennej), zmienia się suma słomek (a tym także wartość wyrażenia w zależności od tej zmiennej).

Rysunek 2: Zmiana wartości wyrażenia $2x+1$ poprzez zmianę liczby słomek w polach (x).





Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Znaczenie „zmiennej” i „wyrażenia zależnego od takiej zmiennej” w algebrze konstruowane jest w sposób zauważany poprzez manipulację konkretnymi przedmiotami.

Dyskusja przy użyciu wytycznych UDL na temat wyżej wymienionych działań

Zauważamy, że ten sam cel edukacyjny tworzenia znaczenia „zmiennej” i „ekspresji zależnej od tej zmiennej” w algebrze jest traktowany na różne sposoby oparte na trzech zasadach UDL (Tabela 7, nasze komentarze na *czerwono* ilustrują związek między zasadami a naszymi działaniami).

Tabela 7: Analiza działań poprzez tabelę zasad UDL.

<i>Zaangażowanie</i>	<i>Reprezentacja</i>	<i>Działanie i Tworzenie</i>
<i>Nastawienie na Pozyskiwanie</i> Optymalizacja indywidualnego wyboru i autonomii Optymalizacja trafności, wartości i autentyczności Minimalizacja zagrożenia i elementów rozprasających	<i>Percepcja</i> Proponowanie sposobów dostosowywania wyświetlania informacji Proponowanie alternatywy dla informacji dźwiękowych Oferowanie alternatywy dla informacji wizualnych Różne kanały, poprzez które wyświetlane są informacje (wizualno-dynamiczne; wizualne; symboliczne)	<i>Działanie fizyczne</i> Zróżnicowanie metod reagowania i nawigacji Optymalizacja dostępu do narzędzi i technologii pomocniczych



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

<p>Trwały wysiłek Wytrwałość</p> <p>Zwiększenia znaczenia celów i zadań</p> <p>Zmiana wymagania i zasobów celem optymalizacji wyzwań</p> <p>Wspieranie współpracy i społeczności</p> <p>Zwiększenie opinii ukierunkowanych na mistrzostwo</p> <p>Zmiana wymagań i zasobów celem optymalizacji wyzwań</p> <p>Ukierunkowane na informacje zwrotne wspierające zaangażowanie i motywację w odniesieniu do opracowania rozwiązania zadania</p>	<p>Język & Symbole</p> <p>Wyjaśnienie słownictwa i symbole</p> <p>Objaśnienie składni i struktury</p> <p>Proponowanie alternatywnego języka i symboli do dekodowania informacji i pracy nad informacjami</p> <p>Obsługa dekodowania tekstu, notacji matematycznej i symboli</p> <p><i>Sprzyja temu dynamiczna akcja i manipulacja przedmiotami</i></p> <p>Promowanie zrozumienia w różnych językach</p> <p>Ilustrowanie za pomocą wielu mediów</p> <p><i>Sprzyja temu aktywność polegająca na transkodowaniu między różnymi rejestrami przedstawicielstw</i></p> <p>Obsługa dekodowania tekstu, notacji matematycznej i symboli</p> <p><i>Sprzyja temu wizualizacja różnych rejestrów w tym samym czasie (na przykład na linii algebraicznej zmienna jest punktem ruchomym na linii i jest oznaczona znakiem x).</i></p>	<p>Tworzenie i Komunikacja</p> <p>Używanie wielu mediów do komunikacji</p> <p>Użycie wielu narzędzi do budowy i kompozycji</p> <p>Użycie różnych rejestrów komunikacji</p> <p>Sprzyja temu stosowanie terminów, które są alternatywą dla terminów formalnych w odniesieniu do przedmiotów matematycznych. Takie alternatywy przypominają znaczenie, które zostało skonstruowane przez uczniów. Na przykład uczniowie, którzy pracowali z AlNuSet, chętnie mówią o „ruchomym punkcie”, gdy odnoszą się do zmiennej.</p> <p><i>Ponadto w działaniach zapewnione są wirtualne lub konkretne manipulacje matematyczne. Na przykład przeciągnięcie ruchomego punktu może pomóc w wizualizacji przyjmowania przez zmienną różnych wartości na osi liczbowej.</i></p> <p><i>Wybrane działania związane z tą zasadą to:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - prośba o odczytanie tabeli za pomocą AlNuSet (do transkodowania z tabeli do AlNuSet) - prośba o odczytanie AlNuSet za pomocą tabeli (w celu transkodowania AlNuSet do tabeli)
<p>Wewnętrzna regulacja</p> <p>Promowanie oczekiwań i przekonań, które optymalizują motywację</p> <p>Ułatwianie indywidualnych umiejętności i strategii radzenia sobie</p> <p>Rozwój samooceny i refleksji</p> <p><i>Strategie oceniania kształtującego, jak zostało to ukazane w części 2, może pomóc w samoocenie i refleksji. Mówiąc dokładniej, nauczyciel może udzielać różnego rodzaju informacji zwrotnych.</i></p>	<p>Rozumienie</p> <p>Aktywizowanie lub dostarczanie wiedzy podstawowej.</p> <p>Podkreślenia wzorca, ważnych własności, wielkich pomysłów i relacji (punkt kontrolny 3.2)</p> <p>Przewodnik przetwarzania i wizualizacji informacji</p> <p>Maksymalizacja transferu i generalizację</p> <p>Postrzeganie, język i symbole, rozumienie (Konstruowanie użytecznej wiedzy, dostępnej dla przyszłych decyzji, zależy nie tylko od doboru informacji, ale od aktywnych „umiejętności przetwarzania informacji”)</p>	<p>Funkcje wykonawcze</p> <p>Wskazanie właściwych celów</p> <p>Korzystanie z artefaktów także może być wsparciem dla pamięci. Artefakty kierują procesem dociekań uczniów, dostarczając informacji zwrotnych.</p> <p>Wspieranie planowania i opracowywania strategii</p> <p>Ułatwianie zarządzania informacjami i zasobami</p> <p>Zwiększenie możliwości monitorowania postępów</p>

Pozwala to uczniom tworzyć znaczenie dla rozważanych pojęć algebraicznych.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Narzędzie interwencyjne 2

To narzędzie interwencyjne zostało stworzone z myślą o rozwiązywaniu trudności, które mogą się pojawić podczas zajmowania się reprezentacją algebraiczną, w rozpatrywanym przypadku trudność ta jest w większej mierze związana z dziedziną poznawczą wizualno-przestrzenną niż z domeną rozumowania (zob. na przykład Q4A11, Q4A12 i Q4A14 B2).

Rozważmy na przykład następujące wyrażenia algebraiczne:

$$x^2 = \dots$$

$$2x = \dots$$

Można zauważyć, iż trudności wizualno-przestrzenne są bardziej widoczne w zaawansowanej arytmetyce niż w arytmetyce elementarnej, która opiera się na pozycyjnym systemie reprezentacji i dotycząc tylko jednego kierunku (lewy-prawy). W zaawansowanej arytmetyce dochodzą inne kierunki: pozycja pionowa (ułamki), pozycja ukośna (potęgi, pierwiastki, indeks dolny). Co więcej, symbole są zapisane w różnych rozmiarach, a różne rozmiary i położenie mają inne znaczenie. Rozważmy następujące wyrażenia:

$$2; 22; -2; \frac{1}{2}; 2^2; 2\sqrt{22}; 2\sqrt{2}$$

Co więcej, gdy mamy do czynienia z liczbami ujemnymi, konieczne jest wyobrażenie sobie znaku minus jako części liczby, a nie tylko jako znaku operacyjnego.

Wszystkie powyższe fakty mogą wywołać u uczniów dysonans poznawczy, ponieważ konieczne jest zrekonstruowanie tego, co wcześniej zostało wyuczone w odniesieniu do liczb naturalnych. Ponadto uczeń musi przeprowadzić bardziej złożoną syntezę wizualną wyrażen (zarówno wyrażen numerycznych, jak i algebraicznych). Na przykład poniższe wyrażenie wymaga prawidłowego połączenia 2 i x, w zależności od położenia symboli.

$$x^2 = \dots$$

$$2x = \dots$$

Oznacza to, że konieczne jest zidentyfikowanie i zrozumienie struktury wyrażenia celem uchwycenia jego znaczenia. Strukturę można narysować za pomocą edytora równań programu Word (rysunek 3):

Rysunek 3: Edytor równań programu Word do wizualizacji struktury wyrażenia:



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



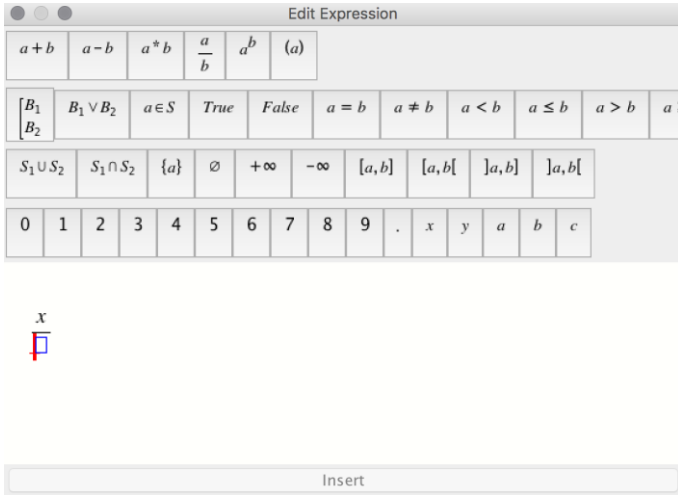
This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

To samo można wykonać również za pomocą innych edytorów (Rysunek 4, lub na przykład, edytor AINuSet):

Rysunek 4: Edytor AINuSet



Narzędzie interwencyjne 3

To narzędzie interwencyjne zostało stworzone z myślą o rozwiązywaniu trudności, które mogą się pojawić podczas obliczeń pamięciowych (patrz na przykład Q1.4 kwestionariusza B2).

Na przykład w przypadku obliczenia:

$$36 \times 11$$

Obliczanie w pamięci wymaga sprawnego zarządzania funkcjami wykonawczymi, które mogą być spowolnione przez konieczność pamiętania o wynikach pośrednich. W takim przypadku cały proces obliczeniowy może zawieść. W tym przypadku możemy powiedzieć, że trudność tkwi nie w znajomości pamięciowych strategii obliczeniowych, a raczej w pamięci: uczeń nie zdaje egzaminu z powodu trudności w zapamiętywaniu i odtwarzaniu pośrednich wyników obliczeń.

Interwencja ma na celu zapewnienie uczniom wsparcia pamięci. Przydatne mogą być systemy reprezentacji, które są wydajne i szybkie we wspieraniu zapamiętywania i odtwarzania. Weźmy na przykład pod uwagę następującą nieformalną reprezentację (rysunek 5):

Rysunek 5: Przykład nieformalnego pisania jako pomoc w procesie kalkulacji.

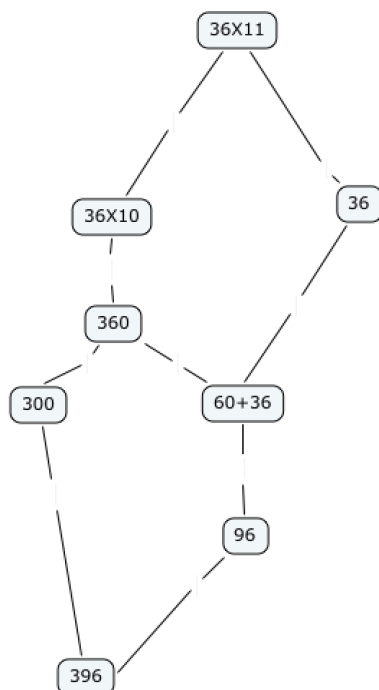


Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Narzędzie interwencyjne 4

To narzędzie interwencyjne zostało stworzone celem rozwiązania trudności, które mogą się pojawić podczas pracy z wykresami na płaszczyźnie kartezjańskiej i które są powiązane z dziedziną poznawczą wizualno-przestrzenną (na przykład, Q4Ar3, Q4Ar4 i Q4Ar5 w kwestionariuszu B2).

To narzędzie interwencyjne czerpie z doświadczenia FaSMEd (<https://microsites.ncl.ac.uk>).

Narzędzie interwencyjne polega na prowadzeniu uczniów krok po kroku przez interpretację wykresu przy jednoczesnym zagwarantowaniu przestrzeni do pracy grupowej i dyskusji w klasie, tak aby uczniowie stali się źródłem wzajemnej informacji dla tych kolegów, którzy mają większe trudności. Dyskusja klasowa jest również okazją dla nauczyciela do przekazania uczniom konkretnych informacji zwrotnych.

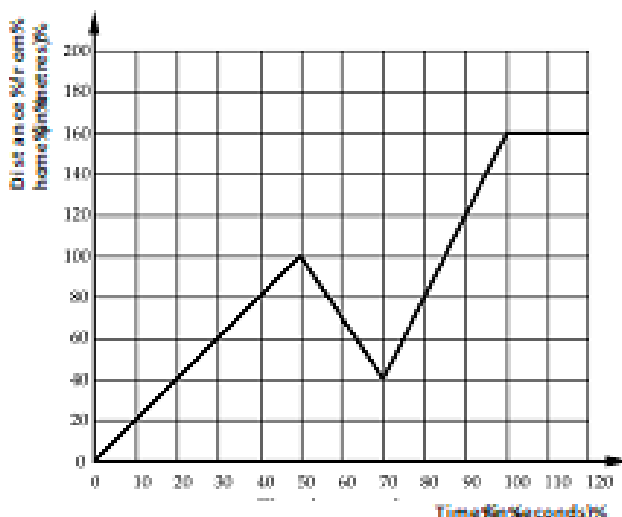
Oto krótkie omówienie sekwencji. Każde pytanie (arkusz roboczy, zgodnie z terminologią projektu FaSMEd) należy przekazać uczniom do pracy w grupie. Po każdym pytaniu nauczyciel przeprowadza dyskusję w klasie.

Arkusz roboczy 1 introduces the graph and the corresponding story: the graph represents the way in which a student, Tommaso, walks, on a straight road, from home to the bus stop. The question posed to students makes them focus on the second section of the graph, that is the segment that connects the points (50, 100) and (70, 40). Students are asked to deduce, from the graph, what happens during the period of time from 50s to 70s.

przedstawia wykres i odpowiadającą mu historię: wykres przedstawia sposób, w jaki uczeń Tommaso idzie prostą drogą z domu do przystanku autobusowego. Zadane studentom pytanie skłania ich do skupienia się na drugiej części wykresu, czyli segmencie łączącym punkty (50, 100) i (70, 40). Studenci proszeni są o wywnioskowanie na podstawie wykresu, co dzieje się w okresie od 50 do 70 lat.

Rysunek 6: Arkusz roboczy 1

Każdego ranka Tommaso idzie prostą drogą z domu do oddalonego o 60 metrów przystanku autobusowego. Wykres przedstawia jego podróż w jeden konkretny dzień.



(1) Co się dzieje w czasie od 50 do 70 sekundy?
Na podstawie czego tak uważasz?

Zwracamy uwagę, że uczniowie proszeni są o wyjaśnienie, w jaki sposób wydedukowali poszczególne informacje z wykresu, co ma skłonić do zastanowienia się nad przyczynami uzasadniającymi prawidłową interpretację wykresu czas-odległość.

Arkusz roboczy 1A jest arkuszem pomocniczym, który może być dany tym uczniom, którzy mają trudności z odpowiedzią na Arkusz 1. Nauczyciel może zdecydować o daniu arkusza pomocniczego wszystkim uczniom, którzy mają trudności z przestrzennym obszarem poznawczym.

Rysunek 7: Arkusz roboczy 1A

(1) Co się dzieje w czasie od 50 do 70 sekundy?
Na podstawie czego tak uważasz?

Pomoc do odpowiedzi do pytania 1:

Pamiętaj, że Tommaso idzie prostą drogą.

- Jaka jest odległość od domu po 50 sekundach?
- Jaka jest odległość od domu po 70 sekundach?

„Pomoc” w arkuszu 1A ma na celu wspieranie uczniów w interpretacji wykresu na dwa sposoby:



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

1. sugestia zawarta w arkuszu („Pamiętaj, że Tommaso idzie prostą drogą”) ma na celu zapobieganie pomyleniu przez uczniów wykresu z rysunkiem drogi (proponowanie interpretacji, takich jak „Tommaso skręca w prawo, potem w lewo” lub „Tommaso jest w dół pod górę, a potem znowu w górę”).
2. te dwa pytania sprawiają, że uczniowie skupiają się na różnicach w odległości Tommaso od domu, pomagając spostrzec, iż skoro odległość maleje, Tommaso zbliża się do domu.

Arkusz roboczy 1B jest arkuszem roboczym zachęcającym do ankiety: proponowane są trzy odpowiedzi udzielone przez innych fikcyjnych uczniów, z prośbą o wskazanie właściwej.

Rysunek 8: Arkusz roboczy 1B

(1) Co się dzieje w czasie od 50 do 70 sekundy?
Na podstawie czego tak uważasz?

Jaka jest prawidłowa odpowiedź?

- (a) W czasie od 50 do 70 sekundy Tommaso powraca.
- (b) W czasie od 50 do 70 sekundy Tommaso zmienia swoją drogę
- (c) W czasie od 50 do 70 sekundy droga, po której idzie Tommaso, schodzi w dół.

Arkusz roboczy 2 przenosi uwagę na ostatnią sekwencję wykresu, czyli segment poziomy (100,160)-(120,160).

Rysunek 9: Arkusz roboczy 2

(2) Co się dzieje w ciągu ostatnich 20 sekund?
Na podstawie czego tak uważasz?

Pytanie w *Arkuszu 2* koncentruje się na interpretacji poziomej linii na wykresie czasowo-odległościowym.

Arkusz roboczy 3 wymaga od uczniów ustalenia, kiedy Tommaso dotrze do przystanku autobusowego. Tutaj nacisk położony jest na interpretację punktu na wykresie czasu i odległości jako nośnika dwóch informacji: odległości od domu i spędzonego czasu. Uczniowie muszą zidentyfikować punkt (100, 160) jako ten, na którym muszą się skupić, aby znaleźć odpowiedź.

Rysunek 10: Arkusz roboczy 3

(2) Co się dzieje w ciągu ostatnich 20 sekund?
Na podstawie czego tak uważasz?

- (a) Po 120 sekundach
- (b) Po $50 + 70 + 100 + 120$ sekundach, czyli po 340 sekundach
- (c) Po 100 sekundach
- (d) Po 50 sekundach

Pytanie z arkusza roboczego 3 jest proponowane jako ankieta. Pierwsza opcja przedstawia jeden z typowych błędów popełnianych przez uczniów, którzy interpretują ostatni punkt po prawej stronie wykresu jako ten reprezentujący moment, w którym Tommaso się zatrzymuje. Druga opcja została wstawiona, aby sprawdzić, czy uczniowie wybraliby ją ze względu na zaproponowane „wyrażenie matematyczne”, bez analizy jego poprawności. Ta ankieta jest pomyślana jako punkt wyjścia do dyskusji skupionej na przyczynach leżących u podstaw wyboru odpowiedzi.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Arkusz roboczy 4 To ostatnie pytanie zaproponowane w celu wsparcia interpretacji wykresu przez uczniów, które sprawia, że uczniowie skupiają się na odległości, jaką pokonał Tommaso, by dotrzeć do przystanku autobusowego.

Rysunek 11: Arkusz roboczy 4

(4) Czy Tommaso szedł przez 160 m? Dlaczego?

Pytanie ma na celu skłonienie uczniów do postrzegania różnicy między dwoma pojęciami: odległością od domu i odległością, którą ktoś przeszedł. Uczniowie są następnie proszeni o podzielenie się powodami leżącymi u podstaw ich odpowiedzi.

Arkusz roboczy 4A jest pomocniczym arkuszem roboczym, który należy dać tym uczniom, którzy mają trudności z odczytaniem arkusza roboczego 4.

Rysunek 12: Arkusz roboczy 4A

(4) Czy Tommaso szedł przez 160 m? Dlaczego?

Pomoc do odpowiedzi do pytania nr 4:

Przeanalizuj wykres i odpowiedz na następujące pytania:

(a) Jaka jest odległość, którą przebył Tommaso w pierwszych 120 sekundach?	Odpowiedź:
(b) Jaka jest odległość, którą przebył Tommaso w czasie od 50 do 70 sekundy?	Odpowiedź:
(c) Jaka jest odległość, którą przebył Tommaso w czasie od 70 do 100 sekundy?	Odpowiedź:
(d) Jaka jest odległość, którą przebył Tommaso w czasie ostatnich 20 sekund?	Odpowiedź:

Odpowiedź do pytania nr 4:

„Pomoc” w arkuszu roboczym 4 składa się z czterech różnych pytań, za pomocą których uczniowie są kierowani ku oddzielnej uwadze na różnych sekcjach wykresu. W ten sposób mogą określić odległość, jaką przebył Tommaso, i zinterpretować ją jako sumę odległości pokonanych przez Tommaso w okresach odpowiadających każdej sekcji wykresu.

Arkusz roboczy 5 Koncentracja uwagi na całościowej interpretacji wykresu. Uczniowie proszeni są o zaproponowanie możliwego uzupełnienia historii, zgodnie z interpretacją wykresu, który był obsługiwany przez poprzednie arkusze.

Rysunek 13: Arkusz roboczy 5

(5) Po udzieleniu odpowiedzi na pytania z poprzednich arkuszy roboczych opisz, jak Tommaso przeszedł drogę ze swojego domu do przystanku autobusowego. Co mogło się wydarzyć?



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Arkusze robocze 5 ma na celu umożliwienie uczniom przypomnienie wszystkich aspektów podkreślonych w poprzednich arkuszach ćwiczeń i związanych z nimi dyskusjami i problemami.

Dyskusja poprzez wytyczne UDL na temat wyżej wymienionych aktywności

Widzimy, iż powyższa sekwencja nauczania jest spójna z trzema zasadami UDL, o czym świadczy poniższa tabela (Tabela 8, nasze komentarze na **czerwono** ilustrują związek między zasadami a naszymi działaniami).

Tabela 8: Analiza działań poprzez tabelę zasad UDL.

Nastawienie na pozyskiwanie	Percepcja	Działanie fizyczne
<p>Trwały wysiłek i wytrwałość: Praca w grupach i dyskusja w klasie mają na celu wspieranie współpracy i społeczności. Podczas dyskusji w klasie nauczyciel i rówieśnicy przekazują informacje zwrotne ukierunkowane na opanowanie treści matematycznej.</p>	<p>Język i symbol</p> <p>Arkusze robocze mają „zapewnić elastyczność i łatwy dostęp do wielu reprezentacji notacji (np. Reguły, wzory, zadania tekstowe, wykresy)”.</p>	<p>Tworzenie i komunikacja</p> <p>Praca w grupie i dyskusja w klasie są skutecznym środkiem w „zapewnianiu zróżnicowanych mentorów (tj. Nauczycieli / tutorów, którzy używają różnych podejść motywowania, kierowania, informacji zwrotnej lub informowania)”, „dostarczania zróżnicowanych informacji zwrotnych (np. tych, które mogą być dostosowane w pracy indywidualnej ucznia).</p> <p>Arkusze robocze są skutecznym środkiem w „zapewnianiu rusztowań, które mogą być stopniowo prezentowane wraz z rosnącą niezależnością [ucznia] i umiejętnościami.”</p>
<p>Wewnętrzna regulacja: Informacje zwrotne nauczycieli i rówieśników promują wewnętrzną regulację ucznia w procesie nabywania wiedzy matematycznej.</p>	<p>Rozumienie: Analiza wykresu jest sposobem kierowania przetwarzaniem informacji i wizualizacją.</p>	<p>Funkcje wykonawcze</p>



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



Project number: 2018-1-IT02-KA201-048274

Bibliografia

- [1] Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.
- [2] Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. *ZDM Mathematics Education*.
- [3] Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2018). Enhancing formative assessment in mathematical class discussion: a matter of feedback. *Proceedings of CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland*. hal-01949286, pp. 3460-3467.
- [4] Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian J. of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- [5] Robotti E., Baccaglini-Frank A., (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In *Innovation & Technology. Series Mathematics Education in the Digital Era*, A. Monotone, F. Ferrara (eds), Springer Publisher.
- [6] Robotti E., (2016). Designing innovative learning activities to face up to difficulties in algebra of dyscalculia students: how exploit the functionality of AlNuSet. In *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks - Potential and pitfalls*. A. Baccaglini-Frank, A. Leung (eds), Springer Publisher.



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

The European Commission support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents which reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



This work is under a [Creative Commons Attribution - Non-commercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)